

**MODEL MATEMATIKA DINAMIKA ANAK PUTUS
SEKOLAH DENGAN PROGRAM GASPOL 12 DI
KABUPATEN REMBANG**

SKRIPSI

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika**



**Oleh : NILA FADLILATUL ILMA
NIM : 2108046086**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025**

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Nila Fadlilatul Ilma
NIM : 2108046086
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

MODEL MATEMATIKA DINAMIKA ANAK PUTUS SEKOLAH DENGAN PROGRAM GASPOL 12 DI KABUPATEN REMBANG

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 26 Mei 2025

Pembuat pernyataan,



Nila Fadlilatul Ilma

NIM : 2108046086



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **MODEL MATEMATIKA DINAMIKA ANAK PUTUS SEKOLAH DENGAN PROGRAM GASPOL 12 DI KABUPATEN REMBANG**

Penulis : Nila Fadlilatul Ilma

NIM : 2108046086

Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 13 Juni 2025

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Ariska Kurnia R., M. Sc.

NIP : 198908112019032019

Penguji II,

Zulaikha, M. Si.

NIP : 199204092019032027

Penguji III,

Eva Khoirun Nisa, M. Si.

NIP : 198701022019032019

Penguji IV,

Aini Fitriyah, M. Sc.

NIP : 198909292019032021

Pembimbing,

Zulaikha, M.Si.

NIP : 199204092019032027

NOTA DINAS

Semarang, 26 Mei 2025

**Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang**

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

**Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan,
arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:**

**Judul : MODEL MATEMATIKA DINAMIKA ANAK PUTUS
SEKOLAH DENGAN PROGRAM GASPOL 12 DI
KABUPATEN REMBANG**
Nama : Nila Fadlilatul Ilma
NIM : 2108046086
Jurusan : Matematika

**Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat
diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo
untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.**

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing,



Zulaikha, M.Si.

NIP : 199204092019032027

ABSTRAK

Permasalahan anak putus sekolah masih menjadi isu penting dalam dunia pendidikan di Indonesia, termasuk di Kabupaten Rembang. Untuk mengatasi tingginya angka putus sekolah di Kabupaten Rembang, maka pemerintah daerah mencanangkan program GASPOL 12 (Gerakan Ayo Sekolah Pol 12) yang bertujuan mengembalikan anak-anak putus sekolah ke pendidikan formal maupun nonformal. Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksi model matematika dinamika anak putus sekolah dengan mempertimbangkan program GASPOL 12, menganalisis titik ekuilibrium serta kestabilan lokal sistem, menghitung bilangan reproduksi dasar, dan melakukan simulasi terhadap model. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka. Model yang digunakan merupakan adaptasi dari model EDR (*Eligibility-Drop Out-Recovery*) dan SEITR (*Susceptible-Exposed-Infection-Treatment-Recovery*) yang dimodifikasi menjadi model SIGR (*Susceptible-Infected-GASPOL 12-Recovered*). Hasil penelitian menunjukkan bahwa model memiliki dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah dan titik ekuilibrium endemik. Analisis kestabilan lokal menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah bersifat stabil jika $R_0 < 1$, sedangkan titik ekuilibrium endemik bersifat stabil jika $R_0 > 1$. Simulasi numerik menunjukkan bahwa keberadaan program GASPOL 12 dapat menurunkan jumlah anak putus sekolah di Kabupaten Rembang. Dengan demikian, model ini dapat digunakan sebagai alat bantu dalam mengevaluasi dan merancang kebijakan pendidikan yang lebih efektif.

Kata kunci : Model Matematika, Anak Putus Sekolah, GASPOL 12, SIGR, Sistem Dinamik

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ***"Model Matematika Dinamika Anak Putus Sekolah dengan Program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang"*** sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini tidak lepas dari doa, bantuan, bimbingan, motivasi dan peran dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Musahadi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang
2. Ibu Any Muanalifah, M.Si, Ph.D., dan Bapak Prihadi Kurniawan, M.Sc., selaku Ketua dan Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo Semarang.
3. Ibu Zulaikha, M.Si., sebagai dosen pembimbing sekaligus dosen wali yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk memberikan bimbingan, arahan, serta motivasi selama proses penelitian dan penulisan skripsi, serta telah mendampingi penulis sepanjang masa studi.
4. Seluruh Bapak/Ibu dosen Program Studi Matematika UIN Walisongo Semarang yang telah memberikan ilmu dan pengetahuan selama masa studi.

5. Bapak Sukarman (alm.) dan Ibu Siti A'isah selaku orang tua penulis yang senantiasa mendoakan dan memberikan yang terbaik dalam setiap langkah kehidupan penulis; Siti Asiroh yang tidak hanya membiayai pendidikan, tetapi senantiasa mendoakan serta memberikan kebebasan dan kepercayaan penuh dalam menentukan pilihan selama menempuh pendidikan; serta kakek dan seluruh keluarga besar yang senantiasa memberikan dukungan, kasih sayang, motivasi, dan doa yang tiada hentinya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan perkuliahan ini.
6. Pemerintah Kabupaten Rembang yang telah memberikan beasiswa sehingga penulis dapat melanjutkan studi di UIN Walisongo Semarang.
7. Teman-teman dekat penulis yaitu Fatimah Oktaviani, Achla Fauziyah, Erlinda Diah P., Liya Tsaniyatul, Khoirun Nisa', Alicia Fauziya dan Nabilatun Nisa yang senantiasa memberikan dukungan, motivasi, semangat, dan menjadi teman diskusi.
8. Teman-teman satu kelas penulis yang saling mendukung.
9. Teman-teman KKN MIT posko 16 Desa Sukorejo yang senantiasa memberikan dukungan.
10. Seluruh teman seperjuangan dan pihak-pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, namun telah memberikan kontribusi dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis

harapkan demi penyempurnaan di masa mendatang. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membacanya.

Semarang, 26 Mei 2025

Penulis,

Nila Fadlilatul Ilma

NIM : 2108046086

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iv
NOTA PEMBIMBING I	iv
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	8
C. Tujuan Penelitian	8
D. Manfaat Penelitian	9
E. Batasan Masalah	9
BAB II LANDASAN PUSTAKA	11
A. Persamaan Diferensial	11
1. Persamaan Diferensial Biasa	11
B. Sistem Dinamik	15
1. Sistem Otonomus	17
2. Sistem Nonotonomus	22
C. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	24
D. Analisis Kestabilan Sistem Dinamik	29
1. Solusi Positif dan Terbatas	29
2. Titik Ekuilibrium	33
3. Linearisasi	35
4. Matriks Jacobian	39
5. Nilai Eigen dan Vektor Eigen	41
6. Kriteria Routh-Hurwitz	53
E. Metode Runge-Kutta Orde Empat	54
F. Model Matematika	56

G.	Anak Putus Sekolah	61
H.	Program GASPOL 12	63
I.	Kajian Penelitian Terdahulu.....	65
BAB III Metodologi Penelitian.....		69
A.	Metode Penelitian	69
B.	Prosedur Penelitian	69
BAB IV PEMBAHASAN		72
A.	Konstruksi Model Matematika Anak Putus Sekolah Dengan Program GASPOL 12	72
B.	Solusi Nonnegatif dan Terbatas	79
C.	Titik Ekuilibrium	86
1.	Titik Ekuilibrium Yang Bebas Dari Anak Putus Sekolah	86
2.	Titik Ekuilibrium Endemik Anak Putus Sekolah	88
D.	Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	93
E.	Analisis Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium	96
1.	Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Bebas Anak Putus Sekolah	99
2.	Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Endemik Anak Putus Sekolah	106
F.	Simulasi Numerik	119
1.	Simulasi I: Titik Ekuilibrium Bebas Anak Putus Sekolah	119
2.	Simulasi II: Titik Ekuilibrium Endemik Anak Putus Sekolah	133
BAB V PENUTUP		145
A.	Kesimpulan	145
B.	Saran	147
DAFTAR PUSTAKA		148

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 2.1	Sifat Kestabilan Sistem Linear	52
Tabel 2.2	Stabil Dan Ketidakstabilan Sistem Nonlinier	52
Tabel 2.3	Keterangan Variabel Dan Parameter	59
Tabel 2.4	Kajian Penelitian Terdahulu	66
Tabel 4.1	Variabel yang Digunakan dalam Membuat Model	74
Tabel 4.2	Parameter Yang Digunakan Dalam Membuat Model	74
Tabel 4.3	Tabel Titik Ekuilibrium Dan Syaratnya	119
Tabel 4.4	Parameter Model	120
Tabel 4.5	Nilai Awal Dari Variabel	120
Tabel 4.6	Tabel Nilai Eigen Dan Hasil	123
Tabel 4.7	Nilai R_0 Dan Titik Ekuilibrium Dengan Berbagai Nilai Parameter β	127
Tabel 4.8	Tabel Nilai Eigen Pada Titik Ekuilibrium E_{01}	130
Tabel 4.9	Tabel Nilai Eigen Pada Titik Ekuilibrium E_{02}	131
Tabel 4.10	Titik Ekuilibrium, Nilai Eigen, dan Kestabilan untuk Berbagai Nilai β	132
Tabel 4.11	Parameter Model	133
Tabel 4.12	Nilai Awal Dari Variabel	134
Tabel 4.13	Tabel Nilai Eigen Dan Hasil	137
Tabel 4.14	Nilai R_0 Dan Titik Ekuilibrium Dengan Berbagai Nilai Parameter β	141

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Judul	Halaman
Gambar 2.1	Proses Pemodelan Matematika Menurut Widowati Dan Sutimin (2007)	58
Gambar 2.2	Model EDR (<i>Eligibility-Dropout-Recovery</i>) Anak Putus Sekolah (Obasuyi, 2020)	59
Gambar 3.1	Diagram Alur Penelitian	71
Gambar 4.1	Diagram Transfer Model Matematika Dinamika Anak Putus Sekolah Dengan Program GASPOL 12 Di Kabupaten Rembang	75
Gambar 4.2	Simulasi Subpopulasi Rentan Untuk Putus Sekolah (S^0)	124
Gambar 4.3	Simulasi Subpopulasi Yang Terinfeksi Sindrom Putus Sekolah (I^0)	124
Gambar 4.4	Simulasi Subpopulasi Yang Terinfeksi Sindrom Putus Sekolah Dan Mendapatkan Program GASPOL 12 (G^0)	125
Gambar 4.5	Simulasi Subpopulasi Yang Kembali Bersekolah Baik Secara Formal Maupun Nonformal (R^0)	125
Gambar 4.6	Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (S^0)	127

Gambar 4.7	Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (I^0)	128
Gambar 4.8	Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (G^0)	128
Gambar 4.9	Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (R^0)	129
Gambar 4.10	Simulasi Subpopulasi Yang Rentan Untuk Putus Sekolah (S^*)	138
Gambar 4.11	Simulasi Subpopulasi Yang Terinfeksi Sindrom Putus Sekolah (I^*)	138
Gambar 4.12	Simulasi Subpopulasi Yang Terinfeksi Putus Sekolah Dan Mendapatkan Program GASPOL 12 (G^*)	139
Gambar 4.13	Simulasi Subpopulasi Yang Kembali Bersekolah Baik Secara Formal Maupun Nonformal (R^*)	139
Gambar 4.14	Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (S^*)	141
Gambar 4.15	Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (I^*)	142
Gambar 4.16	Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (G^*)	142
Gambar 4.17	Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (R^*)	143

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Perhitungan Nilai Eigen Secara Manual Dan Menggunakan Bantuan MATLAB 2013a Pada Persamaan (4.39)	155
Lampiran 2 Script MATLAB Simulasi Numerik Kondisi Bebas Anak Putus Sekolah Dengan Nilai $\beta = 0,0001$	156
Lampiran 3 Perhitungan Bilangan Reproduksi Dasar Dan Titik Ekuilibrium Dengan Beberapa Nilai β Yang Berbeda ($\beta = 0,0001; 0,00015; 0,0002; 0,0003$) Menggunakan Bantuan MATLAB 2013a	160
Lampiran 4 Script MATLAB Simulasi Titik Ekuilibrium Bebas Anak Putus Sekolah dengan Berbagai Nilai β	164
Lampiran 5 Perhitungan Titik Ekuilibrium Pada $\beta = 0,00035$	166
Lampiran 6 Untuk Nilai Parameter $\beta = 0,00035$ Diperoleh Dua kondisi I , Salah Satunya Adalah $I^0 = 0$ Yang Menghasilkan Titik Ekuilibrium Bebas Anak Putus Sekolah $E^0 = (1666,67; 0; 0; 0)$. Perhitungan Nilai Eigen Dilakukan Dengan Bantuan Maple 11	169

Lampiran 7	Untuk Nilai Parameter $\beta = 0,00035$ Diperoleh Dua kondisi I , Salah Satunya Adalah $I^* = 4,93$ Yang Menghasilkan Titik Ekuilibrium Bebas Anak Putus Sekolah $E_1 = (1657, 14; 4, 93; 2, 46; 2, 13)$. Perhitungan Nilai Eigen Dilakukan Dengan Bantuan Maple 11	171
Lampiran 8	Script Maple Perhitungan Titik Ekuilibrium Dan Nilai Eigen Untuk Berbagai Nilai β	173
Lampiran 9	Perhitungan Nilai Eigen Secara Manual Dan Menggunakan Bantuan MATLAB 2013a Pada Persamaan (4.41)	175
Lampiran 10	Script MATLAB Simulasi Numerik Kondisi Endemik Anak Putus Sekolah Dengan Nilai $\beta = 0,0005$	177
Lampiran 11	Perhitungan Bilangan Reproduksi Dasar Dan Titik Ekuilibrium Dengan Berbagai Nilai β Yang Berbeda ($\beta = 0,0004; 0,0005; 0,0006; 0,0007$) Menggunakan Bantuan MATLAB 2013a	181
Lampiran 12	Script MATLAB Simulasi Titik Ekuilibrium Endemik Anak Putus Sekolah Dengan Berbagai Nilai β	185

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Pendidikan secara langsung berkontribusi dalam mengembangkan kualitas sumber daya manusia (SDM) yang menjadi faktor utama penentu kemajuan suatu negara (Yaneri, dkk., 2022). Dengan adanya pendidikan, maka dapat meningkatkan kecerdasan dan keterampilan manusia sehingga pendidikan berperan dalam pembangunan suatu negara (Yaneri dkk, 2022). Menurut Daoed Joesoef yang dikutip oleh Yaneri, dkk (2022), pembangunan nasional tidak hanya bergantung pada kekayaan alam dan pendapatan per kapita rakyat, tetapi juga pada pendidikan sebagai variabel penting yang menghubungkan kedua aspek tersebut. Oleh karena itu, banyak negara di dunia termasuk Indonesia mengalokasikan anggaran besar untuk sektor pendidikan. Sejak 2009, Indonesia telah menetapkan alokasi 20% dari Anggaran Pendapatan dan Belanja Negara (APBN) untuk pendidikan (Yaneri, dkk., 2022). Selain itu, dalam rangka memperbaiki kualitas dan pemerataan pendidikan di Indonesia, maka kebijakan yang dikeluarkan pemerintah diantaranya menerapkan program wajib belajar 12 tahun (Margiyanti & Maulia, 2023).

Program wajib belajar 12 tahun ini kelanjutan dari program wajib belajar 9 tahun yang diresmikan oleh Presiden Soeharto pada 2 Mei 1994. Program wajib belajar 12 tahun bertujuan agar setiap generasi bangsa minimal menyelesaikan pendidikan

hingga tingkat Sekolah Menengah Atas (SMA) sehingga dapat menciptakan generasi yang berkualitas dan berkompeten. Program ini diluncurkan untuk memastikan keberhasilan dan kesinambungan program sebelumnya serta mempersiapkan generasi emas Indonesia pada tahun 2045 (Margiyanti & Maulia, 2023). Selain pemerintah yang mewajibkan warga negaranya untuk belajar, agama islam juga menganjurkan manusia untuk terus menuntut ilmu. Bahkan, islam menetapkan kewajiban bagi umatnya untuk mencari ilmu. Hal tersebut telah dijelaskan dalam hadis yang diriwayatkan Ibnu Majah nomor 224 (Wardatusshopa, dkk., 2024).

طَلَبُ الْعِلْمِ فَرِيضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ

Artinya: “Menuntut ilmu itu wajib atas setiap Muslim” (HR. Ibnu Majah no. 224, dari sahabat Anas bin Malik radhiyallahu ‘anhu, disahihkan Al Albani dalam Shahiih al-Jaami’ish Shaghiir no. 3913).

Menuntut ilmu atau belajar adalah kewajiban setiap manusia. Melalui proses belajar, seseorang dapat beralih dari ketidaktahuan menjadi tahu. Selain itu, belajar dapat mengubah perilaku seseorang menjadi lebih baik. Sehingga belajar sangat penting bagi manusia untuk mendapatkan kebahagiaan dunia dan akhirat. Dengan demikian, program pemerintah tentang wajib belajar dianggap sejalan dengan ajaran islam yang memerintahkan umatnya untuk selalu menuntut ilmu dan meningkatkan

pengetahuan dengan cara belajar (Wardatusshopa, dkk., 2024).

Program wajib belajar yang digagas oleh pemerintah sebenarnya sangat baik jika diterapkan dengan optimal. Namun, pelaksanaannya masih belum sesuai harapan. Salah satu penyebabnya adalah masalah pendidikan di Indonesia yang sangat kompleks, termasuk isu anak putus sekolah (Margiyanti & Maulia, 2023). Menurut Darmaningtyas yang dikutip oleh Widiyanti, dkk (2023), putus sekolah merupakan kondisi di mana anak-anak usia sekolah (7 s.d. 18 tahun) berhenti menjalani kegiatan pendidikan, baik formal maupun informal sebelum anak-anak memperoleh pengetahuan yang memadai untuk bertahan hidup di masyarakat.

Pada tahun ajaran 2022/2023, jumlah siswa yang putus sekolah di Indonesia yaitu 76.834 siswa. Jumlah ini mengalami peningkatan 1,26% dibandingkan dengan tahun ajaran 2021/2022 dengan total 75.876 siswa yang putus sekolah. Tahun ajaran 2020/2021, jumlah anak putus sekolah jauh lebih tinggi dibandingkan dengan tahun 2021/2022 dan 2022/2023 yaitu 83.724 siswa yang putus sekolah (Putri, 2023). Meskipun ada tren penurunan, tingginya angka putus sekolah di berbagai jenjang pendidikan menunjukkan bahwa masih ada tantangan besar dalam mempertahankan siswa agar tetap melanjutkan pendidikan (Widiyanti, dkk., 2023).

Tingginya angka putus sekolah berdampak pada rendahnya tingkat pendidikan nasional dan menurunnya Indeks Pembangunan Manusia atau HDI (*Human Development Index*), yang mencerminkan kualitas sumber daya manusia (Yaneri, dkk., 2022). Pada dasarnya, tingginya angka putus sekolah dapat menghalangi pertumbuhan dan kemajuan negara, baik dalam aspek ekonomi, sosial, maupun budaya (Alifa, 2023). Oleh karena

itu, persoalan anak putus sekolah mendapatkan perhatian serius dari pemerintah salah satunya yaitu pemerintah Kabupaten Rembang yang mencanangkan program Gerakan Ayo Sekolah Pol 12 atau GASPOL 12.

Program GASPOL 12 dirancang dalam rangka meningkatkan angka partisipasi sekolah sehingga perlu dilakukan penanganan anak tidak sekolah oleh pemerintah di Kabupaten Rembang. Berdasarkan data Dinas Pendidikan Kabupaten Rembang (2023), jumlah anak tidak sekolah tertangani yang terhimpun sampai tahun 2023 sebanyak 1337 anak (Rahmasari, dkk., 2023). Program GASPOL 12 ini ditujukan kepada anak-anak usia sekolah (7 hingga 18 tahun) yang tidak bersekolah, dengan kategori Anak Tidak Sekolah (ATS) meliputi: (1) Anak yang belum pernah bersekolah, (2) Anak yang putus sekolah sebelum menyelesaikan jenjang pendidikan, dan (3) Anak yang berhenti sekolah saat transisi ke jenjang pendidikan selanjutnya. Penanganan terhadap ATS ini dengan cara mengembalikan anak yang tidak bersekolah ke sekolah, baik formal maupun nonformal (bbpmpjateng, 2023). Menurut Mestinan dikutip oleh Assa dkk. (2022), alasan internal putus sekolah adalah karena alasan pribadi, pengaruh teman sebaya, dan sanksi karena tidak masuk sekolah yang berujung pada putus sekolah. Faktor eksternal meliputi: status sosial-ekonomi keluarga, keterlibatan orang tua, dan hubungan orang tua yang kurang harmonis (Assa, dkk., 2022). Sedangkan penyebab anak yang belum pernah sekolah di Kabupaten Rembang yaitu karena disabilitas serta akses ke Sekolah Luar Biasa (SLB) yang jaraknya jauh dari rumah. Adanya program GASPOL 12 ini diharap dapat mengurangi jumlah anak putus sekolah di Kabupaten Rembang.

Untuk memahami dan mengatasi masalah anak putus

sekolah di Kabupaten Rembang, penggunaan model matematika menjadi pendekatan yang sangat penting dan relevan. Model ini memungkinkan evaluasi terhadap efektivitas program GASPOL 12 dengan menggambarkan permasalahan yang ada di dunia nyata dalam bentuk bahasa atau simbol matematis, seperti diagram, persamaan, grafik, atau tabel (Shadiq, 2004). Melalui representasi ini, model matematika mampu menjelaskan secara mendalam dan menghasilkan kesimpulan yang akurat, sehingga membantu dalam memahami permasalahan secara lebih komprehensif (Kurniawati & Rosyidi, 2019).

Penelitian terkait pemodelan anak putus sekolah, model matematika tipe SEITR (*Susceptible-Exposed-Infection-Treatment-Recovery*), dan program GASPOL 12 telah dilakukan dengan berbagai pendekatan. Penelitian terdahulu oleh Ayoade dan Farayola (2022) mengembangkan model matematika untuk menganalisis kebijakan pemerintah dalam mengurangi jumlah anak putus sekolah di Nigeria. Penelitian ini menunjukkan bahwa program pemerintah memberikan dampak positif dalam menurunkan angka anak putus sekolah.

Obasuyi (2020) menggunakan model EDR (*Eligibility-Drop Out-Recovery*) yang diadaptasi dari model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) untuk memodelkan dinamika anak putus sekolah di negara berkembang. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kebijakan pemerintah yang tepat dan berkelanjutan memberikan dampak positif dalam mengurangi jumlah anak putus sekolah.

Penelitian oleh Kourrad, dkk. (2023) mengembangkan model matematika SDR (*Schooling-Drop Out-Recovery*) dalam menganalisis masalah putus sekolah, serta mengusulkan kebijakan

kontrol optimal untuk mengurangi angka putus sekolah. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa kebijakan kontrol optimal, seperti pemberian dana kepada keluarga miskin yang memiliki anak masih bersekolah dan pengembalian anak yang putus sekolah melalui pendidikan nonformal efektif dalam mengurangi angka putus sekolah.

Penelitian oleh Amdouni, dkk. (2017) menggunakan model dinamika matematika untuk menganalisis faktor-faktor yang mempengaruhi keputusan siswa untuk putus sekolah. Hasil penelitian menunjukkan bahwa keterlibatan orang tua dapat mencegah siswa putus sekolah, sementara pengaruh teman sebaya yang putus sekolah dapat meningkatkan risiko siswa lain untuk berhenti sekolah terutama jika siswa tersebut tidak tinggal bersama orang tua.

Penelitian oleh Rahmasari, Santoso, dan Kismartini. (2023) mengevaluasi pelaksanaan Program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang yang bertujuan untuk mengembalikan anak putus sekolah agar menyelesaikan pendidikan hingga tingkat menengah atas. Hasil penelitian menunjukkan bahwa program ini belum berjalan optimal karena adanya beberapa hambatan, seperti kurangnya koordinasi, minimnya infrastruktur pendukung, dan belum adanya prosedur operasional yang jelas. Untuk mengatasi hambatan tersebut, penelitian ini merekomendasikan perbaikan dalam hal koordinasi, pemberian insentif kepada pelaksana, serta pengembangan fasilitas pendidikan inklusif untuk anak-anak penyandang disabilitas.

Selain itu, model SEITR (*Susceptible-Exposed-Infection-Treatment-Recovery*) yang awalnya digunakan untuk memodelkan dinamika tuberkulosis juga memberikan

wawasan penting dalam pendekatan berbasis intervensi. Ramadhan, dkk. (2018) menggunakan model SEITR untuk mengevaluasi efektivitas strategi DOTS (*Directly Observed Treatment Short-course*) dalam menurunkan jumlah individu yang terinfeksi tuberkulosis. Penelitian ini menunjukkan bahwa kompartemen *treatment* dalam model SEITR memberikan dampak signifikan dalam mengurangi prevalensi penyakit (pengurangan jumlah kasus aktif). Pendekatan ini relevan untuk diterapkan dalam dinamika anak putus sekolah dengan menambahkan intervensi berupa Program GASPOL 12 sebagai kompartemen *treatment* dalam model EDR.

Berdasarkan penelitian-penelitian sebelumnya, penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan model SIGR (*Susceptible-Infection-Program GASPOL 12-Recovery*) sebagai bentuk adaptasi dari model EDR berdasarkan Obasuyi (2020). Model ini menambahkan kompartemen *treatment* berupa Program GASPOL 12 yang telah diterapkan di Kabupaten Rembang dengan mengganti kompartemen *Drop Out* menjadi kompartemen *Infection* untuk menekankan proses transisi anak menjadi tidak bersekolah akibat berbagai faktor risiko. Program GASPOL 12 dalam model ini berfungsi sebagai intervensi langsung yang memindahkan individu dari kompartemen *Infection* ke *Recovery*. Dengan pengembangan ini, model yang dihasilkan diharapkan mampu memberikan gambaran lebih mendalam tentang dinamika anak putus sekolah serta mengevaluasi efektivitas Program GASPOL 12 dalam mengurangi angka anak putus sekolah di Kabupaten Rembang.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, penelitian ini akan membahas masalah berikut:

1. Bagaimana kontruksi model matematika dinamika anak putus sekolah dengan program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang?
2. Bagaimana menentukan titik ekuilibrium dan kestabilan lokal titik ekuilibrium dari model matematika dinamika anak putus sekolah dengan program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang?
3. Bagaimana interpretasi hasil simulasi numerik model matematika dinamika anak putus sekolah dengan program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang?

C. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membentuk model matematika dinamika anak putus sekolah dengan program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang.
2. Menentukan titik ekuilibrium dan kestabilan lokal titik ekuilibrium dari model matematika dinamika anak putus sekolah dengan program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang.
3. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik model matematika dinamika anak putus sekolah dengan program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang.

D. Manfaat Penelitian

1. Untuk Mahasiswa
Diharapkan hasil penelitian ini akan meningkatkan pengetahuan tentang pemodelan matematika.
2. Untuk Peneliti Selanjutnya
Diharapkan bahwa temuan penelitian ini dapat digunakan sebagai sumber referensi peneliti lain, terutama yang membahas topik pemodelan matematika.
3. Untuk Pemerintah
Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi pertimbangan dalam mengambil kebijakan untuk mengurangi jumlah anak putus sekolah.

E. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Subpopulasi anak yang rentan putus sekolah mencakup semua anak usia sekolah (7-18 tahun) yang terdaftar dalam pendidikan formal maupun nonformal pada jenjang sekolah dasar hingga sekolah menengah atas, serta memiliki Nomor Induk Siswa Nasional (NISN) pada tahun 2023 di Kabupaten Rembang.
2. Lokasi pelaksanaan program GASPOL 12 berada di lima Kecamatan yang ada di Kabupaten Rembang, yaitu Lasem, Rembang, Sarang, Sluke, dan Sulang pada tahun 2023. Pemilihan lokasi ini berdasarkan manajemen yang ditetapkan dengan keputusan Bupati Rembang.

3. Subpopulasi anak putus sekolah yang mengikuti program GASPOL 12 merupakan anak putus sekolah yang telah terdaftar melalui aplikasi Sistem Informasi Pembangunan Berbasis Masyarakat (SIPBM).
4. Anak-anak usia sekolah yang putus sekolah dapat melanjutkan ke sekolah baik formal maupun nonformal dengan ketentuan jika melanjutkan sekolah formal masih memenuhi persyaratan pendaftaran sekolah yang ada.
5. Model ini terdiri dari kompartemen SIGR, dimana: kompartemen S merupakan anak-anak yang rentan putus sekolah, kompartemen I merupakan anak-anak yang putus sekolah, kompartemen G merupakan anak-anak putus sekolah yang mendapatkan program GASPOL 12, dan kompartemen R merupakan anak-anak putus sekolah yang kembali bersekolah, baik melalui jalur formal maupun nonformal.
6. Pada model dinamika ini, diasumsikan bahwa anak yang berada di kompartemen I (putus sekolah) tidak dapat langsung berpindah ke kompartemen R (kembali bersekolah) tanpa terlebih dahulu melalui kompartemen G (Program GASPOL). Proses ini menggambarkan peran program GASPOL sebagai intervensi yang diperlukan untuk membantu anak-anak yang putus sekolah agar dapat kembali bersekolah baik di jalur formal maupun nonformal.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

A. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah konsep dasar dalam matematika yang digunakan untuk menggambarkan hubungan antara fungsi dan turunannya. Dalam berbagai disiplin ilmu seperti fisika, teknik, dan ekonomi, persamaan ini berfungsi untuk memodelkan fenomena yang melibatkan perubahan (Nuraeni, 2017).

Definisi 2.1.1 (Ross, 1989)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang mencakup turunan dari satu atau lebih variabel terikat (dependen) terhadap satu atau lebih variabel bebas (independen).

Dalam persamaan diferensial, dikenal pula istilah orde.

Definisi 2.1.2 (Tenenbaum & Pollard, 1963)

Orde didefinisikan sebagai tingkat tertinggi dari turunan yang terdapat dalam suatu persamaan diferensial.

Persamaan diferensial dibagi menjadi dua jenis. Hal ini tergantung pada jumlah variabel bebas dalam persamaan. Persamaan diferensial dibedakan menjadi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial (Ross, 1989).

1. Persamaan Diferensial Biasa

Definisi 2.1.3 (Ross, 1989)

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang

melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat (dependen) terhadap satu variabel bebas (independen).

Secara umum, persamaan diferensial biasa berorde n dapat ditulis (Boyce, DiPrima, & Meade, 2017):

$$F\left(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)\right) = 0 \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) menunjukkan hubungan antara variabel bebas t dan nilai-nilai fungsi u serta turunan pertamanya hingga turunan ke- n , yaitu $u', u'', \dots, u^{(n)}$. Dalam persamaan diferensial, $y = u(t)$ sehingga $y', y'', \dots, y^{(n)}$ sebagai pengganti $u'(t), u''(t), \dots, u^{(n)}(t)$. Jadi, persamaan (2.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$F\left(t, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \quad (2.2)$$

Contoh 2.1.4 (Ross, 1989)

Di bawah ini merupakan contoh persamaan diferensial biasa.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial biasa berorde dua karena dalam persamaan tersebut, variabel x adalah satu-satunya variabel bebas, sedangkan y adalah variabel terikat. Dikatakan sebagai persamaan diferensial biasa berorde dua karena memiliki turunan tertinggi yaitu turunan kedua.

Sedangkan klasifikasi persamaan diferensial biasa menurut persamaannya dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa linier dan persamaan diferensial biasa nonlinier (Ross,

1989).

a. Persamaan Diferensial Biasa Linier

Definisi 2.1.5 (Ross, 1989)

Persamaan diferensial biasa linier orde n , dengan variabel terikat y dan variabel bebas x , adalah persamaan yang berada dalam bentuk, atau dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x), \quad (2.4)$$

di mana a_0 tidak identik dengan nol.

Dikatakan persamaan diferensial biasa linier jika memenuhi kriteria berikut:

1. Variabel terikat y dan berbagai turunannya hanya muncul dalam pangkat satu.
2. Tidak ada perkalian antara variabel terikat y dan atau turunan yang muncul.
3. Tidak ada fungsi transedental dari variabel terikat y dan atau turunannya yang muncul. Fungsi transedental yaitu fungsi yang tidak dapat dinyatakan sebagai hasil dari operasi aljabar biasa seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan pangkat dengan eksponen rasional seperti fungsi eksponensial, fungsi logaritma, dan fungsi trigonometri.

Contoh 2.1.6 (Ross, 1989)

Di bawah ini merupakan contoh persamaan diferensial biasa linier.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad (2.5)$$

Persamaan (2.5) disebut sebagai persamaan diferensial biasa linier karena variabel terikat y dan berbagai turunannya hanya muncul dalam pangkat satu, dan tidak ada perkalian antara variabel terikat y dan atau turunannya yang muncul. Dikatakan persamaan diferensial biasa linier berorde dua karena memiliki turunan tertinggi yaitu turunan kedua.

b. Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier**Definisi 2.1.7** (Ross, 1989)

Persamaan diferensial biasa nonlinier adalah persamaan diferensial biasa yang tidak linear.

Berarti dalam persamaan ini tidak memenuhi kriteria linier.

Contoh 2.1.8 (Ross, 1989)

Di bawah ini merupakan contoh persamaan diferensial biasa nonlinier.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0 \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) merupakan persamaan diferensial biasa nonlinier karena variabel terikat y muncul dengan pangkat dua dalam suku $6y^2$. Jadi, tidak memenuhi kriteria linier poin kedua. Persamaan (2.6) berorde dua karena memiliki turunan tertinggi yaitu turunan kedua.

B. Sistem Dinamik

Sistem disebut sebagai sistem dinamik jika variabel bebasnya adalah waktu dan solusi yang dihasilkan dapat digunakan untuk memprediksi masa depan. Artinya, sistem tersebut menjelaskan bagaimana fenomena yang dimodelkan berubah seiring waktu (Barnes & Fulford, 2009). Jadi, sistem dinamik adalah sistem yang memungkinkan untuk memprediksi keadaan masa depan sistem tersebut berdasarkan keadaan saat ini atau masa lalunya (Nagle, Saff, & Snider, 2018). Ada dua jenis sistem dinamik: sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu (Alligood, Sauer, & Yorke, 2000).

• Sistem Dinamik Diskrit

Sistem dinamik diskrit menggambarkan perubahan keadaan suatu sistem dalam waktu yang bersifat diskrit, yaitu waktu yang dihitung dalam interval tertentu yang terpisah, seperti hari ke hari, bulan ke bulan, atau tahun ke tahun, di mana perubahan sistem hanya dianalisis pada titik-titik waktu tertentu (Strogatz, 2015). Sistem ini menggunakan peta iterasi atau persamaan beda untuk memodelkan perubahan dari satu langkah waktu ke langkah berikutnya (keadaan sistem di waktu t digunakan untuk menentukan keadaan sistem di waktu $t + 1$) (Strogatz, 2015). Bentuk umum dari sistem ini yaitu (Wiggins, 2000):

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), \quad t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N} \quad (2.7)$$

dengan

- $\vec{x}_t$: Vektor yang merepresentasikan keadaan sistem

pada waktu t .

- $\vec{x}_{t+1}$: Vektor yang merepresentasikan keadaan sistem pada waktu $t + 1$, yaitu setelah perubahan terjadi.
- $\vec{f}(\vec{x}_t)$: Fungsi iterasi atau aturan transisi yang menentukan bagaimana keadaan sistem pada waktu t berubah menjadi keadaan baru pada waktu $t + 1$.
- $t \in \mathbb{N}$: Waktu t adalah bilangan asli ($t = 0, 1, 2, \dots$) digunakan ketika sistem hanya dianalisis mulai dari saat awal menuju waktu berikutnya.
- $t \in \mathbb{Z}$: Waktu t adalah bilangan bulat ($t = \dots, -1, 0, 1, \dots$), digunakan ketika analisis melibatkan masa lalu dan masa depan dari sistem.

• Sistem Dinamik Kontinu

Sistem dinamik kontinu menggambarkan perubahan keadaan suatu sistem dalam waktu yang bersifat kontinu, yaitu waktu dianggap berjalan secara tidak terputus tanpa jeda atau interval tertentu. Pada sistem ini, keadaan sistem dianalisis pada setiap momen waktu dalam rentang tertentu, berbeda dengan waktu diskrit yang hanya memperhitungkan keadaan pada titik-titik waktu tertentu (Strogatz, 2015). Sistem dinamik kontinu menggunakan persamaan diferensial untuk memodelkan laju perubahan sistem (Strogatz, 2015). Bentuk umum dari sistem ini yaitu (Layek, 2015):

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), \vec{x} = \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \quad (2.8)$$

dengan

- $\frac{d\vec{x}}{dt}$: Laju perubahan vektor keadaan $\vec{x}$ terhadap waktu t , yang menggambarkan bagaimana sistem berubah pada setiap waktu.
- $\vec{f}(\vec{x}, t)$: Fungsi yang bergantung pada keadaan sistem saat ini ($\vec{x}$) dan waktu t .
- $\vec{x}(t)$: Vektor keadaan sistem sebagai fungsi dari waktu t . Jika $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, maka $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ adalah variabel yang mencerminkan keadaan sistem pada waktu t .
- $\mathbb{R}^n$: Ruang vektor berdimensi n , di mana n adalah jumlah variabel atau dimensi keadaan sistem.
- $t \in I \subseteq \mathbb{R}$: Waktu t merupakan elemen dari interval I , yang merupakan subset bilangan real.

Terdapat dua jenis sistem persamaan diferensial atau sistem dinamik kontinu berdasarkan bagaimana fungsi $\vec{f}$ bergantung pada variabel waktu t , yaitu sistem otonomus dan sistem nonotonomus (Jordan & Smith, 2007):

1. Sistem Otonomus

Sistem otonomus terjadi jika sisi kanan dari persamaan (2.8) tidak secara eksplisit bergantung pada waktu. Atau dengan kata lain, fungsi $\vec{f}$ tidak bergantung secara eksplisit pada waktu t . Artinya, persamaan diferensial yang menggambarkan sistem hanya bergantung pada variabel keadaan dan tidak ada komponen yang melibatkan waktu secara langsung. Bentuk umum dari sistem ini yaitu (Perko, 2000):

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (2.9)$$

- $\frac{d\vec{x}}{dt}$: Laju perubahan vektor keadaan $\vec{x}$ terhadap waktu t , yang menggambarkan bagaimana sistem berubah pada setiap waktu.
- $\vec{f}(\vec{x})$: Fungsi yang bergantung pada keadaan sistem saat ini ($\vec{x}$) dan tidak memiliki ketergantungan eksplisit terhadap waktu t . Hal ini menunjukkan bahwa aturan perubahan sistem bersifat tetap (tidak berubah seiring waktu).
- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: Vektor keadaan sistem dalam ruang berdimensi n , dimana n adalah jumlah variabel yang mencerminkan keadaan sistem.

Atau dapat dijabarkan seperti dibawah ini.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.10)$$

dengan

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel tak bebas dan t adalah variabel bebas. Di sini, fungsi $\vec{f}$ hanya bergantung pada variabel $\vec{x}$ dan tidak secara langsung pada waktu t . Sistem otonomus dapat dibagi menjadi dua kategori: sistem otonomus linier dan sistem

otonomus nonlinier (Strogatz, 2015).

a. Sistem Otonomus Linier

Sistem otonomus linier adalah sistem otonomus yang terjadi ketika $\vec{x}$ pada sisi kanan persamaan (2.9) hanya muncul dalam pangkat pertama. Sistem otonomus linier merupakan sistem persamaan diferensial linier yang tidak secara eksplisit bergantung pada waktu.

Jika masing-masing fungsi $f_1, f_2, \dots, f_n$ pada persamaan (2.11) merupakan fungsi linier dari variabel bebas t dan tak bebas $x_1, x_2, \dots, x_n$, maka sistem tersebut disebut sistem persamaan diferensial linier (Boyce, DiPrima, & Meade, 2017). Jika $x(t)$ merupakan variabel tak bebas dengan variabel bebas t , $\frac{dx}{dt}$ adalah turunan dari $x(t)$ terhadap t dan $a(t)$ adalah koefisien dari $x(t)$, maka sistem dari n persamaan diferensial linier orde n dapat ditulis dalam bentuk (Ross, 1989):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2, \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n. \end{cases} \quad (2.12)$$

Sistem (2.12) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f} \quad (2.14)$$

Jika fungsi $\vec{f} = 0$, maka sistem (2.14) dikatakan homogen yang dapat ditulis

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

- A : Matriks koefisien berukuran $n \times n$ (dengan n merupakan jumlah dimensi sistem) yang elemennya merupakan konstanta.

Jika koefisien sistem (elemen-elemen matriks A) merupakan konstanta, maka sistem (2.14) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Contoh 2.2.1

Contoh dari sistem otonomus linier yaitu (Strogatz, 2015):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 \end{cases} \quad (2.16)$$

Sistem (2.16) dikatakan sistem otonomus linier karena pada sisi kanannya, variabel x hanya muncul dalam pangkat pertama dan tidak secara eksplisit bergantung pada waktu t . Jika tidak

hanya memuat pangkat pertama, maka sistem ini akan menjadi nonlinier. Selain itu, sistem (2.16) dapat ditulis dalam bentuk seperti sistem (2.15).

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

b. Sistem Otonomus Nonlinier

Sistem otonomus nonlinier adalah sistem otonomus yang terjadi ketika semua variabel $\vec{x}$ pada sisi kanan persamaan (2.9) tidak hanya muncul dalam pangkat pertama tetapi memenuhi salah satu dari kriteria berikut (Ross, 1989):

1. Terdapat variabel terikat dan berbagai turunannya yang muncul dalam pangkat lebih dari satu.
2. Terdapat perkalian antara variabel terikat dan atau turunannya yang muncul.
3. Terdapat fungsi transendental dari variabel terikat dan atau turunannya yang muncul. Fungsi transedental yaitu fungsi yang tidak dapat dinyatakan sebagai hasil dari operasi aljabar biasa seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan pangkat dengan eksponen rasional seperti fungsi eksponensial, fungsi logaritma, dan fungsi trigonometri.

Sistem otonomus nonlinier merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier yang tidak secara eksplisit bergantung pada waktu.

Jika masing-masing fungsi $f_1, f_2, \dots, f_n$ pada persamaan (2.11) bukan fungsi linier dari variabel bebas t dan variabel

tak bebas $x_1, x_2, \dots, x_n$, maka sistem tersebut disebut sebagai sistem persamaan diferensial nonlinier (Boyce, DiPrima, & Meade, 2017). Sistem otonomus yang di susun dari persamaan-persamaan diferensial nonlinier orde satu dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2.18)$$

Contoh 2.2.2

Contoh dari sistem otonomus nonlinier yaitu (Strogatz, 2015):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{L} \sin(x_1) \end{cases} \quad (2.19)$$

Sistem (2.19) merupakan sistem otonomus nonlinier karena sisi kanan dari persamaan mengandung variabel x_1 dalam bentuk fungsi transedental yaitu $\sin(x_1)$ yang menyebabkan sistem ini menjadi nonlinier.

2. Sistem Nonotonomus

Sistem nonotonomus terjadi jika sisi kanan dari persamaan (2.8) bergantung secara eksplisit terhadap waktu. Atau dengan kata lain, waktu t muncul secara eksplisit dalam fungsi $\vec{f}$. Hal ini dapat menyebabkan perilaku sistem berubah seiring waktu dengan cara yang lebih kompleks. Bentuk umum dari sistem

non-otonomus yaitu (Perko, 2000):

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (2.20)$$

- $\vec{f}(\vec{x}, t)$: Fungsi yang bergantung pada keadaan sistem saat ini $\vec{x}$ dan secara eksplisit pada waktu. Hal ini menunjukkan bahwa aturan perubahan sistem berubah seiring waktu.

dengan

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Dalam hal ini, $\vec{f}$ bergantung pada variabel keadaan $\vec{x}$ dan juga variabel waktu t , sehingga dinamika sistem dapat dipengaruhi oleh perubahan waktu secara langsung.

Contoh 2.2.3

Berikut merupakan contoh dari sistem nonotonomus (Verhulst, 1990):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + \sin(t) \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases} \quad (2.22)$$

Suatu sistem dikatakan nonotonomus jika salah satu atau lebih persamaannya secara eksplisit bergantung pada variabel waktu t . Jadi, pada persamaan (2.22) merupakan sistem otonomus karena pada persamaan pertama dalam sistem terdapat $\sin(t)$ yang secara eksplisit bergantung pada waktu t .

C. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar (R_0) dianggap sebagai indikator terpenting dalam epidemiologi penyakit menular (Diekmann, dkk, 2010). Hal ini dikarenakan R_0 mewakili nilai ambang yang menentukan dinamika suatu penyakit dalam suatu populasi (Martcheva, 2015).

Definisi 2.3.1 (*Barnes & Fulford, 2009*)

Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai jumlah rata-rata infeksi sekunder baru yang disebabkan oleh individu yang terinfeksi dalam populasi rentan selama periode individu tersebut masih menularkan penyakit.

Putus sekolah dapat dilihat sebagai fenomena sosial yang menyerupai epidemi karena sifatnya yang menyebar dari satu individu ke individu lain di lingkungan sosial atau jenjang pendidikan (Obasuyi, 2020). Obasuyi mengidentifikasi putus sekolah sebagai sindrom yang menyebar di setiap jenjang pendidikan. Sedangkan menurut Bean (1985) sebagaimana dikutip oleh Kerby (2015), sindrom ini dapat diwujudkan dalam bentuk keinginan yang secara terbuka didiskusikan untuk meninggalkan sekolah sering kali diikuti dengan tindakan nyata berupa pengunduran diri dari sekolah.

Dalam konteks ini, R_0 dapat diinterpretasikan sebagai jumlah rata-rata individu rentan putus sekolah yang dipengaruhi oleh satu individu terinfeksi sindrom putus sekolah. Jika $R_0 < 1$, maka penyebaran sindrom putus sekolah dapat dikendalikan atau dihentikan. Sebaliknya jika $R_0 > 1$, maka fenomena penyebaran sindrom putus sekolah akan semakin meluas dalam populasi. Dalam kasus satu kompartemen yang terinfeksi, R_0 hanyalah hasil

kali antara tingkat infeksi dan durasi rata-rata infeksi (Driessche & Watmough, 2002).

Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) dapat ditentukan dengan menggunakan matriks generasi selanjutnya (Diekmann, dkk, 2010). Gagasan dasarnya adalah menghitung matriks dimana entri entri (i, j) -nya adalah jumlah infeksi sekunder yang terjadi di kompartemen i oleh individu yang terinfeksi di kompartemen j . Dalam model penularan penyakit berbasis kompartemen, perlu mengelompokkan individu ke dalam kompartemen berdasarkan satu variabel keadaan diskrit. Sebuah kompartemen disebut sebagai kompartemen penyakit jika individu di dalamnya terinfeksi. Perlu dicatat bahwa penggunaan istilah "penyakit" di sini lebih luas daripada definisi secara medis dan mencakup tahap-tahap infeksi seperti tahap paparan di mana individu yang terinfeksi belum tentu menular. Dalam mengkonstruksi matriks generasi selanjutnya mencakup kompartemen yang menyebabkan infeksi. Diberikan $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan $x_i \geq 0$ menunjukkan kepadatan individu pada kelas ke- i , $i = 1, 2, \dots, n$ pada waktu t . Asumsikan bahwa proporsi kelas yang terinfeksi adalah m dengan $m \geq n$. Didefinisikan F_i sebagai laju terjadinya infeksi baru di kelas ke- i dan V_i menyatakan selisih laju perpindahan individu dari satu kelas ke kelas lainnya. F_i adalah komponen matriks F dengan $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T$ dan V_i merupakan komponen matriks V dengan $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)^T$.

Matriks F dan V adalah matriks berukuran $m \times m$ yang dinyatakan sebagai berikut (Brauer & Chavez, 2012):

$$F = \frac{\partial F_i(E_0)}{\partial x_j}, V = \frac{\partial V_i(E_0)}{\partial x_j}, \text{ untuk } i, j = 1, 2, \dots,$$

dan E_0 merupakan titik ekuilibrium yang bebas dari anak putus sekolah. Matriks generasi selanjutnya dinyatakan sebagai berikut (Diekmann, dkk, 2010)

$$K = FV^{-1} \quad (2.23)$$

selanjutnya, R_0 diperoleh dari perhitungan

$$R_0 = \rho(K) \quad (2.24)$$

dimana $\rho(K)$ adalah radius *spectral* matriks K atau modulus maksimal dari nilai eigen matriks K .

Contoh 2.3.2

Berikut adalah contoh cara mencari Angka Reproduksi Dasar (R_0) (Agus, dkk., 2019):

Diberikan model epidemi SIR dengan kompartemen S merupakan kelas yang rentan terhadap penyakit. Kompartemen I merupakan kelas yang terinfeksi penyakit, dan kompartemen R merupakan kelas yang sembuh dari penyakit. Model epidemi SIR tersebut adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I \end{cases} \quad (2.25)$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit model (2.25) adalah $E^0(S^0, I^0) = (\frac{\alpha}{\beta}, 0)$. Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar R_0 sistem (2.25) digunakan matriks generasi selanjutnya

yang diperoleh dari kompartemen I . Akan ditentukan matriks X dan matriks Y dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} I(t) &= X - Y \\ \iff I(t) &= \beta SI - \alpha I \end{aligned}$$

Matriks X menyatakan laju munculnya infeksi baru dari kompartemen berpenyakit dan matriks Y menyatakan laju kesembuhan atau kematian penyakit dan nilainya berlawanan dengan model. Diperoleh $X = \beta SI$ dan $Y = \alpha I$. Selanjutnya akan dicari matriks F dan matriks V dengan menurunkan matriks X dan matriks Y terhadap I . Sehingga diperoleh

$$F = \begin{pmatrix} \beta S \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \alpha \end{pmatrix}$$

Kemudian akan dicari invers dari matriks V dan diperoleh

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dilakukan perhitungan matriks generasi selanjutnya.

$$\begin{aligned} K &= FV^{-1} \\ \iff K &= \begin{pmatrix} \beta S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \\ \iff K &= \begin{pmatrix} \frac{\beta S}{\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matriks K adalah matriks generasi selanjutnya berukuran 1×1 .

Nilai eigen dari matriks K yaitu

$$\lambda = \frac{\beta S}{\alpha}$$

Angka reproduksi dasar (R_0) didapatkan dari radius spectral matriks K , atau modulus maksimal dari nilai eigen matriks K , yaitu

$$R_0 = \frac{\beta S}{\alpha}$$

Perhatikan bahwa $R_0 = \frac{\beta S}{\alpha}$ memiliki beberapa kondisi yang mungkin, antara lain:

1. $R_0 = \frac{\beta S}{\alpha} > 1$ jika $S > \frac{\alpha}{\beta}$.
2. $R_0 = \frac{\beta S}{\alpha} < 1$ jika $S < \frac{\alpha}{\beta}$.

Misalkan dengan menggunakan nilai parameter $\beta = 0,0019$, $\alpha = 0,1$ dan $S = 98$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\beta S}{\alpha} \\ \iff R_0 &= \frac{(0.0019)(98)}{(0.1)} \\ \iff R_0 &= 1.86 \end{aligned}$$

Dengan begitu, syarat $S > \frac{\alpha}{\beta}$ akan menghasilkan $R_0 = \frac{\beta S}{\alpha} > 1$. Selanjutnya, jika menggunakan $\beta = 0,0013$, $\alpha = 0,25$ dan $S = 98$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\beta S}{\alpha} \\ \iff R_0 &= \frac{(0.0013)(98)}{(0.25)} \\ \iff R_0 &= 0.51 \end{aligned}$$

Sesuai syarat ke-2 bahwa $S < \frac{\alpha}{\beta}$ diperoleh $R_0 = \frac{\beta S}{\alpha} <$

1. Hal ini berarti penyakit akan menghilang seiring berjalannya waktu. Dengan demikian, untuk mendapatkan $R_0 < 1$ maka nilai parameter penyebut harus lebih besar dari pada nilai parameter pembilang atau $\alpha > \beta S$.

D. Analisis Kestabilan Sistem Dinamik

Analisis kestabilan sistem dinamik sering digunakan untuk memahami perilaku sistem nonlinier dengan cara menyederhanakan dan menganalisis perilaku lokal di sekitar titik ekuilibrium (Cahyaningtias, 2016). Berikut adalah penjelasan mengenai konsep-konsep seperti solusi positif dan terbatas, titik ekuilibrium, linearisasi, matriks Jacobian, nilai eigen dan vektor eigen, serta kriteria Routh-Hurwitz (1876):

1. Solusi Positif dan Terbatas

Agar model matematika memiliki makna secara biologis, maka solusi model harus positif dan terbatas (Kurnia & Adi, 2020). Berikut ini merupakan contoh menganalisis kepositifan dan keterbatasan pada suatu model matematika (Ahmed, dkk., 2023).

Contoh 2.4.1

Dipunyai sistem sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Delta - \frac{\beta_d SI}{S+I} - \beta_e SI - \mu_c S + \frac{\alpha I}{1+bI} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta_d SI}{S+I} + \beta_e SI - \frac{\alpha I}{1+bI} - (\mu_c + \mu_v + \gamma)I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu_c R \end{cases} \quad (2.26)$$

Selanjutnya akan dicari solusi positif dan terbatas dari sistem (2.26).

Teorema 2.4.2 (Solusi Nonnegatif)

Jika $S(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$ dan $R(0) \geq 0$, maka himpunan solusi $\{S(t), I(t), \text{ dan } R(t)\}$ dari sistem (2.26) terdiri atas bilangan real tak negatif untuk setiap $t > 0$.

Bukti. Akan dibuktikan bahwa persamaan $\frac{dS}{dt} = \Delta - \frac{\beta_d SI}{S+I} - \beta_e SI - \mu_c S + \frac{\alpha I}{1+bI}$ memiliki solusi positif. Dengan mengabaikan suku yang positif pada persamaan tidak memberikan pengaruh terhadap kemungkinan nilai $S(t)$ menjadi negatif.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Delta - \frac{\beta_d SI}{S+I} - \beta_e SI - \mu_c S + \frac{\alpha I}{1+bI} \\ \iff \frac{dS}{dt} &\geq - \left(\frac{\beta_d SI}{S+I} + \beta_e SI + \mu_c S \right) \\ \iff \frac{dS}{dt} &\geq -S \left(\frac{\beta_d I}{S+I} + \beta_e I + \mu_c \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Dalam pembuktian solusi positif, dilakukan pendekatan konservatif dengan mengganti suku $\frac{\beta_d I}{S+I}$ menggunakan batas atasnya (memperbesar nilai negatif dari suku tertentu untuk memastikan bahwa walaupun dibuat asumsi kasar dapat menjamin bahwa $S(t) \geq 0$ yaitu $\beta_d I$). Karena $\frac{1}{S+I} \leq 1$, maka berlaku $\frac{\beta_d I}{S+I} \leq \beta_d I$. Penggantian ini memudahkan analisis dengan tetap menjamin bahwa solusi $S(t)$ tidak menjadi negatif meskipun dilakukan pendekatan yang bersifat menyederhanakan. Dengan demikian didapatkan

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &\geq -S(\beta_d I + \beta_e I + \mu_c) \\ \iff \frac{dS}{S} &\geq -(\beta_d I + \beta_e I + \mu_c) dt\end{aligned}\quad (2.28)$$

Persamaan (2.28) merupakan persamaan diferensial. Untuk memperoleh solusi digunakan metode variabel terpisah. Langkah selanjutnya, ruas kiri diintegrasikan terhadap S dan ruas kanan diintegrasikan terhadap t sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{S} dS &\geq \int -(\beta_d I + \beta_e I + \mu_c) dt \\ \iff \ln |S| &\geq -(\beta_d I + \beta_e I + \mu_c)t + c, c \text{ konstanta} \\ \iff e^{\ln |S|} &\geq e^{-(\beta_d I + \beta_e I + \mu_c)t + c} \\ \iff e^{\ln |S|} &\geq e^{-(\beta_d I + \beta_e I + \mu_c)t} e^c, \text{ misal } Z = e^c \text{ dan } Z \text{ adalah konstanta} \\ \iff S(t) &\geq Z e^{-(\beta_d I + \beta_e I + \mu_c)t} \\ &\text{karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\beta_d I + \beta_e I + \mu_c)t} = 0 \\ \iff S(t) &\geq Z(0) \\ \iff S(t) &\geq 0\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $S(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

Oleh karena itu, $S(t)$ bersifat tak negatif untuk $t > 0$. Dengan proses yang sama, akan didapatkan bahwa $I(t)$ dan $R(t)$ bersifat tak negatif untuk $t > 0$. Dengan demikian, teorema ini terbukti. ■

Teorema 2.4.3 (Solusi Terbatas)

Himpunan solusi $\{S(t), I(t), \text{ dan } R(t)\}$ dari sistem (2.26) dengan kondisi awal ($t = 0$) terbatas pada daerah:

$$\Omega = \left\{ (S(t), I(t), R(t)) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq N(t) \leq \frac{\Delta}{\mu_c} \right\}$$

Bukti. Dari sistem (2.26) diketahui bahwa $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ sehingga

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \Delta - \mu_c N - \mu_v I \\ \iff \frac{dN}{dt} &\leq \Delta - \mu_c N \\ \iff \frac{dN}{\Delta - \mu_c N} &\leq dt \end{aligned} \quad (2.29)$$

Untuk mendapatkan solusi umum $N(t)$ dari persamaan (2.29) digunakan metode pemisahan variabel yaitu N dan t sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \int \frac{dN}{\Delta - \mu_c N} &\leq \int dt \\ \iff -\frac{1}{\mu_c} \ln|\Delta - \mu_c N| &\leq t + c, c \text{ konstanta} \\ \iff \ln|\Delta - \mu_c N| &\leq -\mu_c t + c \\ \iff e^{\ln|\Delta - \mu_c N|} &\leq e^{-\mu_c t} e^c, \text{ misal } Z = e^c \text{ dan } Z \text{ adalah konstanta} \\ \iff \mu_c N(t) - \Delta &\leq Z e^{-\mu_c t} \\ \iff \mu_c N(t) &\leq Z e^{-\mu_c t} + \Delta \\ \iff N(t) &\leq Z \frac{e^{-\mu_c t}}{\mu_c} + \frac{\Delta}{\mu_c} \end{aligned}$$

karena

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} Z \frac{e^{-\mu_c t}}{\mu_c} + \frac{\Delta}{\mu_c} \\
 &\iff = \lim_{t \rightarrow \infty} Z \frac{e^{-\mu_c t}}{\mu_c} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta}{\mu_c} \\
 &\iff = 0 + \frac{\Delta}{\mu_c} \\
 &\iff = \frac{\Delta}{\mu_c}
 \end{aligned}$$

sehingga

$$N(t) \leq \frac{\Delta}{\mu_c}$$

Berdasarkan teorema (2.4.3), diketahui bahwa $N(t) \geq 0$ dengan $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. Dengan demikian, terbukti bahwa himpunan

$$\Omega = \left\{ (S(t), I(t), R(t)) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq N(t) \leq \frac{\Delta}{\mu_c} \right\}$$

merupakan batas solusi dari sistem (2.26). Jadi, teorema ini terbukti. ■

2. Titik Ekuilibrium

Untuk melakukan analisis kestabilan suatu sistem, perlu dihitung titik ekuilibrium dari suatu sistem. Titik ekuilibrium dalam sistem dinamik mengacu pada suatu kondisi yang mungkin dimiliki sistem di mana sistem akan tetap ada jika dimulai dari titik tersebut. Ini adalah titik di mana fungsi sistem bernilai nol. Titik ekuilibrium juga dikenal sebagai titik kesetimbangan, titik stasioner, titik tunggal, titik kritis, atau posisi diam (Liu,

2005). Kegunaan dari titik ekuilibrium ini yaitu untuk mengetahui perilaku solusi sistem dengan cara menyelidiki sifat solusi yang tidak bergantung pada waktu.

Definisi 2.4.4 (Perko, 2000)

Diberikan suatu sistem nonlinier

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (2.30)$$

Titik $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium atau titik kritis dari persamaan (2.30) jika $\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$.

Definisi 2.4.5 (Khalil, 1996)

Diberikan titik ekuilibrium $x^(t)$:*

- $x^*(t)$ dikategorikan stabil jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x^*(t_0) - x(t_0)\| < \delta$, berlaku $\|x^*(t) - x(t)\| < \epsilon$ untuk setiap $t > t_0$, di mana $t_0 \in \mathbb{R}$.
- $x^*(t)$ dikategorikan tidak stabil jika tidak memenuhi definisi dari titik ekuilibrium stabil. $x^*(t)$ dikategorikan stabil asimtotik jika $x^*(t)$ stabil dan untuk setiap solusi $x(t)$ terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x^*(t_0) - x(t_0)\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*(t)$.

Berikut merupakan contoh mencari titik ekuilibrium. Dengan menggunakan sistem persamaan (2.25), akan dicari titik ekuilibriumnya.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$$

Akan dicari titik ekuilibrium bebas penyakit untuk mengilustrasikan tidak adanya penyakit dalam suatu populasi.

Untuk itu, diketahui bahwa kompartemen $I^0 = 0$ dan kompartemen R direduksi karena tidak terlalu memberikan pengaruh ke persamaan lain dalam sistem. Jadi, kompartemen R tidak perlu ditentukan nilai-nya. Selanjutnya $I^0 = 0$ dan $\frac{dI}{dt} = 0$ akan disubstitusikan ke dalam persamaan berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \beta S^0 I^0 - \alpha I^0 \\ \iff 0 &= I^0(\beta S^0 - \alpha) \\ \iff 0 &= 0(\beta S^0 - \alpha) \\ \iff 0 &= \beta S^0 - \alpha \\ \iff \alpha &= \beta S^0 \\ \iff \frac{\alpha}{\beta} &= S^0\end{aligned}$$

Diperoleh $S^0 = \frac{\alpha}{\beta}$ sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0(S^0, I^0)$ yaitu $(\frac{\alpha}{\beta}, 0)$.

3. Linearisasi

Linearisasi adalah metode mengubah sistem persamaan nonlinier menjadi persamaan linier. Linearisasi dilakukan terhadap sistem persamaan diferensial nonlinier dengan tujuan untuk mengetahui perilaku sistem (apakah sistem stabil atau tidak) di sekitar titik ekuilibriumnya.

Misal, dipunyai sistem awal berupa sistem persamaan diferensial nonlinier:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = f(x, y) \\ \frac{dy}{d\tau} = g(x, y) \end{cases} \quad (2.31)$$

Jika x^*, y^* adalah titik ekuilibrium dimana titik berhenti berubah ketika $f(x^*, y^*) = 0$ dan $g(x^*, y^*) = 0$, akan dipertimbangkan perubahan kecil dari solusi yang dimulai dari kondisi awal yang mendekati titik ekuilibrium:

$$\begin{aligned} u(\tau) &= x(\tau) - x^* & v(\tau) &= y(\tau) - y^* \\ \iff x(\tau) &= u(\tau) + x^* & y(\tau) &= v(\tau) + y^* \end{aligned}$$

Diketahui bahwa $u(\tau)$ dan $v(\tau)$ adalah fungsi dari τ , namun tidak selalu bernilai nonnegatif. Substitusikan $x(\tau) = u(\tau) + x^*$ dan $y(\tau) = v(\tau) + y^*$ kedalam sistem awal, sehingga

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau}(x) \\ \iff \frac{d}{d\tau}x &= \frac{d}{d\tau}(u(\tau) + x^*) \\ \iff \frac{d}{d\tau}x &= \frac{d}{d\tau}u(\tau) + \frac{d}{d\tau}x^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau}(y) \\ \iff \frac{d}{d\tau}y &= \frac{d}{d\tau}(v(\tau) + y^*) \\ \iff \frac{d}{d\tau}y &= \frac{d}{d\tau}v(\tau) + \frac{d}{d\tau}y^* \end{aligned}$$

karena x^* dan y^* adalah konstan $\left(\frac{dx^*}{d\tau} = 0 \text{ dan } \frac{dy^*}{d\tau} = 0\right)$, maka

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}x &= \frac{d}{d\tau}u(\tau) + \frac{d}{d\tau}x^* \\ \iff \frac{d}{d\tau}x &= \frac{d}{d\tau}u(\tau) + 0 \\ \iff \frac{d}{d\tau}x &= \frac{d}{d\tau}u(\tau) \\ \iff \frac{dx}{d\tau} &= \frac{du}{d\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}y &= \frac{d}{d\tau}v(\tau) + \frac{d}{d\tau}y^* \\
\iff \frac{d}{d\tau}y &= \frac{d}{d\tau}v(\tau) + 0 \\
\iff \frac{d}{d\tau}y &= \frac{d}{d\tau}v(\tau) \\
\iff \frac{dy}{d\tau} &= \frac{dv}{d\tau}
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa $\left(\frac{dx}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} \text{ dan } \frac{dy}{d\tau} = \frac{dv}{d\tau}\right)$, maka

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\tau} &= f(x(\tau), y(\tau)) \\
\iff \frac{du}{d\tau} &= f(u(\tau) + x^*, v(\tau) + y^*) \\
\frac{dv}{d\tau} &= g(x(\tau), y(\tau)) \\
\iff \frac{dv}{d\tau} &= g(u(\tau) + x^*, v(\tau) + y^*)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Asumsikan bahwa f dan g memiliki turunan parsial berkelanjutan setidaknya sampai orde kedua. Selanjutnya dilakukan pengembangan deret taylor menggunakan teorema untuk fungsi dari dua variabel. Setelah itu, akan ditunjukkan ekspansi untuk f (untuk ekspansi g prosesnya sama dengan ekspansi f).

$$\begin{aligned}
f(x(\tau), y(\tau)) &= f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)u(\tau) + f_y(x^*, y^*)v(\tau) \\
&\quad + f_{xx}(x^*, y^*)\frac{u^2(\tau)}{2} + f_{xy}(x^*, y^*)u(\tau)v(\tau) \\
&\quad + f_{yy}(x^*, y^*)\frac{v^2(\tau)}{2} + \dots
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Istilah "turunan parsial kedua" adalah istilah yang lebih rumit dalam perhitungan. Istilah-istilah ini dikalikan dengan nilai-nilai

kecil seperti u^2 , uv , dan v^2 yang menunjukkan perubahan kecil dalam sistem. Jika perubahan ini sangat kecil, seperti $u \approx 0$ dan $v \approx 0$, maka istilah-istilah tersebut menjadi sangat kecil juga sehingga mempengaruhi hasil. Untuk itu, dalam proses linearisasi, suku kuadrat dan suku-suku orde lebih tinggi diabaikan karena nilainya yang sangat kecil di sekitar titik ekuilibrium dan hanya fokus pada bagian yang lebih sederhana.

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &\approx f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)u(\tau) + f_y(x^*, y^*)v(\tau) \\ \frac{dv}{d\tau} &\approx g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)u(\tau) + g_y(x^*, y^*)v(\tau)\end{aligned}\tag{2.34}$$

Karena x^*, y^* adalah titik ekuilibrium, maka $f(x^*, y^*) = 0$ dan $g(x^*, y^*) = 0$. Sehingga diperoleh sistem yang sudah dilinearisasi:

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= f_x(x^*, y^*)u(\tau) + f_y(x^*, y^*)v(\tau) \\ \frac{dv}{d\tau} &= g_x(x^*, y^*)u(\tau) + g_y(x^*, y^*)v(\tau)\end{aligned}\tag{2.35}$$

Matriks dari turunan parsial fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ disebut matriks Jacobian. Sistem yang sudah dilinearisasi tadi dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{d\tau} \\ \frac{dv}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix}\tag{2.36}$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = D_f \vec{x}$$

matriks

$$D_f = \begin{pmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

adalah matriks Jacobian yang dievaluasi di titik ekuilibrium (x^*, y^*) . Semua elemen dari matriks ini adalah konstanta yang sudah diketahui, sehingga

$$D_f = \begin{pmatrix} f_x(x, y) & g_x(x, y) \\ f_y(x, y) & g_y(x, y) \end{pmatrix} \Big|_{x=x^*, y=y^*} \quad (2.37)$$

Dalam teorema Hartman-Grobman (1960), membenarkan pengambilan kesimpulan tentang sistem nonlinier dari mempelajari sistem yang telah dilinearisasi. Teorema Hartman-Grobman (1960) garis besar menyatakan bahwa solusi dari sistem otonom $n \times n$ dari persamaan diferensial biasa yang berada disekitar titik ekuilibrium (keadaan stabil) akan tampak "kualitatif" mirip dengan solusi dari sistem (2.35) yang telah dilinearisasi disekitar titik $(0, 0)$. Hasil ini berlaku hanya ketika titik ekuilibrium tersebut adalah **titik ekuilibrium hiperbolik**, yaitu ketika tidak ada dari nilai eigen matriks D_f yang memiliki bagian real nol. Adapun **titik ekuilibrium nonhiperbolik** terjadi ketika ada dari nilai eigen matriks D_f yang memiliki bagian real nol (minimal satu nilai eigen) (Martcheva, 2015).

4. Matriks Jacobian

Matriks Jacobian merupakan alat penting dalam analisis kestabilan sistem dinamik, terutama dalam konteks pemodelan matematika. Matriks ini terdiri dari semua turunan parsial pertama dari fungsi nonlinier yang menggambarkan sistem. Dalam proses linearisasi, matriks Jacobian digunakan untuk mengubah

sistem persamaan diferensial nonlinier menjadi bentuk yang lebih sederhana sehingga memudahkan analisis kestabilannya (Faizah, dkk., 2019).

Teorema 2.4.6 (Perko, 2000)

Jika $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dapat diturunkan di x_0 , maka semua turunan parsial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ ada di x_0 . Untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$, turunan total $D_f(x_0)$ yaitu

$$D_f(x_0) = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)x_j \quad (2.38)$$

Dengan demikian, jika f adalah fungsi yang dapat diturunkan, maka turunan D_f dinyatakan dalam bentuk matriks Jacobian berukuran $n \times n$.

$$D_f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.39)$$

Misalkan, dipunyai sistem:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = H(x, y, z) \quad (2.40)$$

Matriks Jacobian D_f dapat didefinisikan sebagai berikut (Boyce, DiPrima, & Meade, 2017):

$$D_f = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Contoh 2.4.7

Berikut merupakan contoh mencari matriks Jacobian menggunakan sistem (2.25):

Perhatikan sistem persamaan berikut.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I \end{cases}$$

Didefinisikan bahwa $F(S, I, R) = -\beta SI$, $G(S, I, R) = \beta SI - \alpha I$, dan $H(S, I, R) = \alpha I$. Maka matriks Jacobian-nya adalah

$$D_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial I} & \frac{\partial F}{\partial R} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} & \frac{\partial G}{\partial R} \\ \frac{\partial H}{\partial S} & \frac{\partial H}{\partial I} & \frac{\partial H}{\partial R} \end{pmatrix}$$

$$\iff D_f = \begin{pmatrix} -\beta I & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.4.8 (Perko, 2000)

Titik ekuilibrium $x_0 \in \mathbb{R}^n$ adalah titik ekuilibrium hiperbolik dari sistem persamaan diferensial nonlinier jika bagian real nilai eigen dari $D_f(x_0)$ tidak sama dengan nol.

5. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen dalam sebuah matriks akan digunakan untuk menentukan kestabilan titik ekuilibrium. Nilai eigen suatu matriks dapat didefinisikan sebagai:

Definisi 2.4.9 (Anton & Rorres, 2014)

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol $\vec{x}$ di $\mathbb{R}^n$ disebut

sebagai vektor eigen dari A jika hasil kali $A\vec{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\vec{x}$, yaitu:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (2.42)$$

untuk beberapa skalar λ . Skalar λ adalah nilai eigen dari A dan $\vec{x}$ dikatakan sebagai vektor eigen yang sesuai dengan λ .

Persamaan

$$A\vec{x} = \vec{y} \quad (2.43)$$

dapat dilihat sebagai transformasi linier yang memetakan (atau mengubah) vektor $\vec{x}$ yang diberikan menjadi vektor baru $\vec{y}$ dengan mengubahnya menjadi kelipatan dari vektor $\vec{x}$. Sehingga dapat didefinisikan bahwa $\vec{y} = \lambda\vec{x}$, dimana λ merupakan faktor pengali skalar. Persamaan (2.43) dapat ditulis sebagai berikut:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (2.44)$$

atau

$$(A - \lambda I)\vec{x} = 0 \quad (2.45)$$

- A : Matriks koefisien atau matriks yang berukuran $n \times n$.
- λ : Nilai eigen.
- I : Matriks identitas berukuran $n \times n$. Matriks identitas memiliki nilai 1 pada diagonal utama dan 0 diluar diagonal utama.
- $\vec{x}$: Vektor eigen.

Persamaan (2.45) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.46)$$

Persamaan (2.46) adalah persamaan polinomial derajat n dalam λ dan disebut sebagai persamaan karakteristik dari matriks A . Nilai-nilai λ yang memenuhi persamaan (2.46) bisa bernilai real atau kompleks dan disebut sebagai nilai eigen dari A . Solusi tak nol dari persamaan (2.44) atau (2.45) yang diperoleh dengan menggunakan nilai λ tersebut sebagai vektor eigen yang sesuai dengan nilai eigen tersebut.

Dalam menentukan determinan suatu matriks persegi, terdapat beberapa metode yang dapat digunakan, di antaranya metode sarrus serta metode minor dan kofaktor (Rahardja & Sudaryono, 2024). Namun, sebelum membahas metode-metode tersebut, terlebih dahulu akan dijelaskan definisi dari determinan.

Definisi 2.4.10 (Aitken, 1944)

Misal matriks A merupakan matriks persegi yang berukuran $n \times n$, maka determinan $|A|$ atau $|a_{ij}|$ dari matriks tersebut adalah

$$|A| \equiv |a_{ij}| \equiv \sum \pm a_{1\alpha} a_{2\beta} \cdots a_{n\nu},$$

jumlah ini terdiri dari $n!$ suku yang mencakup semua permutasi $(\alpha, \beta, \dots, \nu)$ dari indeks kolom elemen-elemen a_{ij} , dan tanda $(+)$ atau $(-)$ diberikan pada setiap suku sesuai dengan apakah permutasi tersebut ganjil atau genap.

Determinan adalah sebuah bilangan yang berhubungan dengan matriks persegi. Cara paling dasar untuk menghitung determinan adalah dengan melakukan ekspansi menggunakan

kofaktor (Kirkwood, 2017). Berikut ini merupakan definisi dari determinan matriks berorde tinggi.

Definisi 2.4.11 (Anton, 2010)

Jika A adalah matriks persegi, maka minor dari elemen a_{ij} dilambangkan dengan M_{ij} merupakan determinan dari submatriks yang diperoleh dengan menghapus baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks A . Untuk kofaktor dari elemen a_{ij} dilambangkan dengan C_{ij} dimana

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Contoh 2.4.12 (Anton, 2010)

Berikut ini merupakan contoh menentukan minor dan kofaktor. Misalkan dipunyai matriks A dengan

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

, maka akan ditentukan minor dan kofaktor dari elemen a_{11} .

Penyelesaian:

Untuk menentukan minor dari elemen a_{11} , maka baris ke-1 dan kolom ke 1 dari matriks A akan dihapus sehingga determinan dari submatriks A yang dilambangkan dengan M_{11} adalah

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = (5 \times 8) - (6 \times 4) = 40 - 24 = 16$$

sehingga kofaktor dari elemen a_{11} adalah

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \times 16 = 16.$$

Definisi 2.4.13 (Anton, 2010)

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka bilangan yang diperoleh dengan mengalikan entri-entri pada setiap baris atau kolom dari matriks A dengan kofaktor-kofaktor yang bersesuaian dan menjumlahkan hasil kalinya disebut determinan dari A . Penjumlahan tadi disebut sebagai ekspansi kofaktor dari matriks A . Dengan kata lain:

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj},$$

(Ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke- j)

dan

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in},$$

(Ekspansi kofaktor sepanjang baris ke- i)

Contoh 2.4.14 (Anton, 2010)

Berikut ini merupakan contoh menentukan determinan menggunakan metode ekspansi kofaktor baik baris maupun kolom.

Misal dipunyai matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

akan ditentukan determinan dari matriks A menggunakan ekspansi kofaktor baris pertama dan ekspansi kofaktor kolom pertama.

Penyelesaian:

Akan ditentukan determinan dari matriks A menggunakan

ekspansi kofaktor baris pertama.

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\
 &\Leftrightarrow = 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\
 &\Leftrightarrow = 3((-4)(-2) - (4)(3)) - (1)((-2)(-2) - (3)(5)) + 0((-2)(4) - (5)(-4)) \\
 &\Leftrightarrow = 3(8 - 12) - 1(4 - 15) + 0 \\
 &\Leftrightarrow = 3(-4) - 1(-11) + 0 \\
 &\Leftrightarrow = -1
 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditentukan determinan dari matriks A menggunakan ekspansi kofaktor kolom pertama.

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\
 &\Leftrightarrow = 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \\
 &\Leftrightarrow = 3((-4)(-2) - (4)(3)) - (-2)((1)(-2) - (4)(0)) + 5((1)(3) - (-4)(0)) \\
 &\Leftrightarrow = 3(8 - 12) - (-2)(-2 - 0) + 5(3 - 0) \\
 &\Leftrightarrow = 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) \\
 &\Leftrightarrow = -1
 \end{aligned}$$

Metode selanjutnya yang bisa digunakan dalam menentukan determinan matriks yaitu metode Sarrus. Perhitungan determinan matriks dengan metode Sarrus hanya dapat diterapkan pada matriks ukuran 2×2 dan 3×3 . Metode sarrus menggunakan perkalian elemen matriks secara diagonal. Perkalian elemen matriks pada diagonal turun (dari kiri atas ke kanan bawah) diberi tanda positif, sedangkan perkalian elemen matriks diagonal naik (dari kiri bawah ke kanan atas) diberi tanda negatif (Rahardja & Sudaryono, 2024).

Misal dipunyai matriks A berorde 3×3 .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Maka untuk mencari determinan dari matriks A sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 \\ &\quad - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Contoh 2.4.15 (Boyce, DiPrima, & Meade, 2017)

Berikut merupakan contoh mencari nilai eigen dan vektor eigen. Akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen dari sistem di bawah ini.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases} \quad (2.48)$$

Penyelesaian:

Bentuk matriks terlebih dahulu.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I) \vec{x} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)
\end{aligned}$$

Nilai eigen adalah akar-akar persamaan karakteristik.

$$\begin{aligned}
&\det(A - \lambda I) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det \left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \\
&\therefore \lambda_1 = 2 \text{ dan } \lambda_2 = -1
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$.

Untuk menentukan vektor eigen, maka substitusikan $\lambda_1 = 2$ ke dalam persamaan (2.49) sehingga diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 0 \quad (2.50)$$

$$4x_1 - 4x_2 = 0 \quad (2.51)$$

Pada persamaan (2.50) diperoleh

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= 0 \\ \Longleftrightarrow x_1 &= x_2\end{aligned}$$

lalu substitusikan $x_1 = x_2$ ke dalam persamaan (2.51)

$$\begin{aligned}4x_1 - 4x_2 &= 0 \\ \Longleftrightarrow 4x_2 - 4x_2 &= 0 \\ \Longleftrightarrow 0 &= 0\end{aligned}$$

hasil dari persamaan (2.51) yaitu $0 = 0$, artinya persamaan tersebut memiliki solusi banyak sehingga bisa ditentukan dengan sebarang bilangan untuk nilai x_1 dan x_2 . Misalnya diambil $x_1 = 1$ dan $x_2 = 1$, maka akan dihasilkan vektor eigen $\vec{x}_1$ yaitu

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untuk nilai eigen $\lambda_2 = -1$ yang disubstitusikan dalam persamaan (2.49), diperoleh

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setiap baris dari vektor ini menghasilkan kondisi $4x_1 - x_2 = 0$.

Sehingga akan dicari solusinya.

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 0 \\ \iff 4x_1 &= x_2 \\ \iff x_1 &= \frac{1}{4}x_2 \end{aligned}$$

Substitusikan $x_1 = \frac{1}{4}x_2$ ke dalam persamaan $4x_1 - x_2 = 0$ sehingga akan diperoleh

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 0 \\ \iff 4\frac{1}{4}x_2 - x_2 &= 0 \\ \iff x_2 - x_2 &= 0 \\ \iff 0 &= 0 \end{aligned}$$

karena diperoleh $0 = 0$ artinya punya solusi banyak. Jadi untuk sebarang bilangan yang memenuhi persamaan $4x_1 - x_2 = 0$ menjadi solusi yang dicari. Misalnya untuk $x_1 = 1$ dan $x_2 = 4$ akan dihasilkan vektor eigen kedua, yaitu

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dibawah ini merupakan kriteria kestabilan dari sistem linier.

Teorema 2.4.16 (*Jordan & Smith, 2007*)

Misalkan A adalah matriks konstanta dalam sistem $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ dengan nilai eigen λ_i , untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

1. Jika sistem stabil, maka bagian real dari setiap λ_i , yaitu

$Re(\lambda_i) \leq 0$, untuk semua $i = 1, 2, \dots, n$.

2. Jika $Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, n$ dan tidak ada nilai eigen bernilai nol yang berulang atau jika $Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, n$ dan tidak ada nilai eigen bernilai nol yang berulang, maka sistem stabil secara seragam. Jika terdapat lebih dari satu nilai eigen yang bernilai nol, maka dapat menyebabkan sistem tidak stabil.
3. Sistem stabil asimtotik jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, n$. (Dalam hal ini, sistem juga stabil secara seragam sesuai dengan poin (2)).
4. Jika $Re(\lambda_i) > 0$ untuk salah satu i , maka solusi sistem tidak stabil.

Dibawah ini merupakan kriteria kestabilan dari sistem nonlinier.

Teorema 2.4.17 (Susanto, 2012)

Diberikan $\vec{x}^*$ merupakan titik ekuilibrium hiperbolik dari sistem nonlinier $\frac{d\vec{x}}{dt} = D_f(\vec{x}^*)\vec{x}$ dengan nilai eigen λ :

1. Jika semua bagian real nilai eigen dari matriks $D_f(\vec{x}^*)$ bernilai negatif, maka titik equilibrium $\vec{x}^*$ dari sistem nonlinier adalah stabil asimtotik lokal.
2. Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen dari matriks $D_f(\vec{x}^*)$ yang bagian realnya bernilai positif, maka titik equilibrium $\vec{x}^*$ dari sistem nonlinier adalah tidak stabil.

Berdasarkan nilai akar-akar dari persamaan karakteristik polinomial derajat dua, ada beberapa jenis kestabilan titik

ekuilibrium yang diklasifikasikan dalam tabel 2.1 dan 2.2 (Boyce, DiPrima, & Meade, 2017).

Tabel 2.1. Sifat Kestabilan Sistem Linear

Nilai Eigen	Jenis Titik Kritis	Stabilitas
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Titik simpul (<i>Node</i>)	Tidak stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Titik simpul (<i>Node</i>)	Stabil asimtotik
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Titik pelana (<i>Saddle point</i>)	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Titik simpul proper atau improper	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Titik simpul proper atau improper	Stabil asimtotik
$\lambda_1, \lambda_2 = \lambda \pm i\mu$ dengan $\lambda > 0$	Titik spiral	Tidak stabil
$\lambda_1, \lambda_2 = \lambda \pm i\mu$ dengan $\lambda < 0$	Titik spiral	Stabil asimtotik
$\lambda = 0$	Titik pusat (<i>Center</i>)	Stabil

Tabel 2.2. Stabil Dan Ketidakstabilan Sistem Nonlinier

Nilai Eigen	Jenis Titik Kritis	Stabilitas
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Titik simpul (<i>Node</i>)	Tidak stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Titik simpul (<i>Node</i>)	Stabil asimtotik lokal
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Titik pelana (<i>Saddle point</i>)	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Titik simpul (<i>Node</i>) atau titik spiral	Tidak stabil

Nilai Eigen	Jenis Titik Kritis	Stabilitas
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Titik simpul (<i>Node</i>) atau titik spiral	Stabil asimtotik lokal
$\lambda_1, \lambda_2 = \lambda \pm i\mu$ dengan $\lambda > 0$	Titik spiral	Tidak stabil
$\lambda_1, \lambda_2 = \lambda \pm i\mu$ dengan $\lambda < 0$	Titik spiral	Stabil asimtotik lokal
$\lambda = 0$	Titik pusat (<i>Center</i>) atau titik spiral	Tidak dapat ditentukan

6. Kriteria Routh-Hurwitz

Salah satu masalah umum ketika menentukan jenis kestabilan suatu sistem menggunakan nilai eigen adalah kesulitan dalam menemukan akar-akar dari persamaan karakteristik yang berorde tinggi. Akibatnya, dibutuhkan kriteria untuk menjamin apakah akar-akar persamaan tersebut negatif atau positif. Salah satu kriteria yang efektif untuk menguji kestabilan sistem adalah kriteria Routh-Hurwitz. Kriteria Hurwitz menekankan pada aspek determinan, sedangkan kriteria Routh pada aspek formulasi runtun atau *array* (Wahyuni, dkk., 2015).

Definisi 2.4.18 (Martcheva, 2015)

Diberikan sebuah sistem persamaan karakteristik berbentuk polinomial berderajat n sebagai berikut:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (2.52)$$

Dimana $a_0 = 1$ dan a_j dengan $j = 1, 2, \dots, n$ merupakan bilangan real. Maka matriks n didefinisikan sebagai berikut:

$$H_1 = (a_1); \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}; \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

dan

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Dengan $a_j = 0$ dan $j > n$. Untuk semua akar polinomial $P(\lambda)$ negatif atau negatif bagian real jika dan hanya jika determinan dari semua matrik Hurwitz positif.

$$\det(H_j) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

E. Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta adalah suatu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal atau masalah nilai batas pada persamaan diferensial linier ataupun persamaan diferensial nonlinier (Enkekes & Mardianto, 2022). Tujuan dari digunakannya metode ini yaitu untuk mencapai akurasi pendekatan deret Taylor tanpa memerlukan perhitungan turunan yang lebih tinggi. Berbagai jenis metode Runge-Kutta dapat dirancang dengan menggunakan jumlah suku yang berbeda dalam

fungsi kenaikan seperti yang ditentukan oleh n dimana nilai n ini menunjukkan tingkat akurasi metode. Semakin tinggi nilai n , maka semakin kecil kesalahan globalnya (Chapra & Canale, 2015).

Metode Runge-Kutta (RK) yang paling populer adalah metode Runge-Kutta orde empat. Metode ini menghasilkan derajat ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan metode lain dengan kesalahan truncation global (*global truncation errors*) adalah $O(h^3)$. *Global truncation error* sendiri merupakan ukuran keseluruhan kesalahan akumulatif yang terjadi selama proses integrasi numerik suatu metode. Berikut adalah bentuk paling umum digunakan yang disebut sebagai metode klasik Runge-Kutta orde empat (Chapra & Canale, 2015):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) h \quad (2.54)$$

dimana

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3h) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Semua nilai k berhubungan secara rekurensi, artinya k_1 muncul dalam persamaan untuk k_2 , yang muncul lagi dalam persamaan k_3 dan seterusnya. Rekurensi ini membuat metode Runge-Kutta efisien untuk kalkulasi menggunakan komputer (Enkekes & Mardianto, 2022).

F. Model Matematika

Definisi 2.6.1 (*Widowati & Sutimin, 2007*)

Model matematika adalah representasi dalam bentuk matematika yang dihasilkan dari proses pemodelan matematika. Pemodelan matematika adalah proses mengubah dan menjelaskan masalah dunia nyata menjadi pernyataan matematis.

Model matematika dianggap baik jika mampu merepresentasikan atau menggambarkan masalah dengan akurat. Di bawah ini adalah proses pemodelan matematika (*Widowati & Sutimin, 2007*).

1. Mengubah permasalahan nyata ke dalam bentuk matematika
 Dalam proses ini memerlukan pemahaman yang mendalam tentang masalah yang akan dimodelkan, sehingga memungkinkan untuk mengidentifikasi variabel dan menciptakan hubungan antar variabel yang muncul dalam permasalahan tersebut.
2. Menentukan asumsi model matematika
 Secara fundamental, asumsi menggambarkan cara berpikir yang digunakan untuk menghasilkan suatu model. Asumsi yang digunakan setiap individu bisa berbeda, meskipun mereka menghadapi permasalahan yang sama. Perbedaan ini akhirnya akan mengakibatkan variasi dalam model yang dihasilkan.
3. Membentuk model matematika
 Setelah memahami hubungan antar variabel dan asumsi, proses selanjutnya adalah membuat persamaan atau sistem

persamaan. Tahapan membuat model itu paling penting dan sulit, sehingga perlu dilakukan pengujian ulang terhadap asumsi-asumsi agar proses pembentukan model menjadi tepat dan realistis.

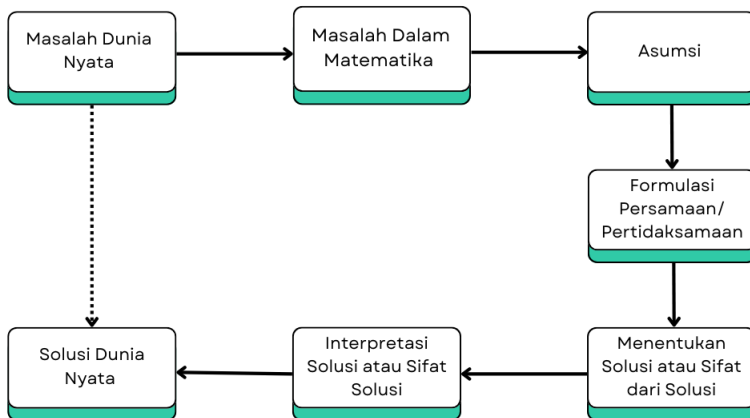
4. Menentukan solusi atau menyelidiki sifat solusi

Tidak semua model matematika memiliki solusi yang dapat ditentukan dengan mudah. Oleh karena itu, pada tahap ini diperlukan analisis atau penyelidikan tentang sifat atau perilaku solusi dari model matematika tersebut.

5. Interpretasi solusi atau sifat solusi model matematika

Pada proses ini mengaitkan kembali bentuk model matematika dengan masalah yang ada dalam dunia nyata. Penafsiran ini dapat direpresentasikan dalam bentuk grafik yang dibuat berdasarkan solusi yang diperoleh, dan selanjutnya diartikan sebagai solusi dalam dunia nyata.

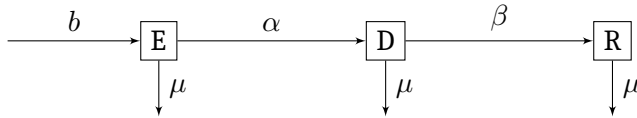
Untuk mempermudah pemahaman, disediakan diagram alur proses pemodelan matematika menurut Widowati dan Sutimin (2007) yang dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Proses Pemodelan Matematika Menurut Widowati Dan Sutimin (2007)

Adapun kontruksi model yang digunakan sebagai acuan dalam karya tulis ini adalah *EDR* (*Eligibility-Dropout-Recovery*) yang mana model ini diadaptasi dari model *SIR* (Obasuyi, 2020). Seluruh populasi dikelompokkan menjadi subpopulasi, yaitu subpopulasi individu yang rentan untuk putus sekolah (E), subpopulasi individu yang terinfeksi sindrom putus sekolah (D), dan subpopulasi individu yang kembali bersekolah atau individu pulih (R). Model EDR dijelaskan dengan Gambar 2.2.

Berikut adalah sistem persamaan diferensial yang akan digunakan:



Gambar 2.2. Model EDR (*Eligibility-Dropout-Recovery*) Anak Putus Sekolah (Obasuyi, 2020)

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = b - \alpha ED - \mu E \\ \frac{dD}{dt} = \alpha ED - (\beta + \mu) D \\ \frac{dR}{dt} = \beta D - \mu R \end{cases} \quad (2.56)$$

dimana:

Tabel 2.3. Keterangan Variabel Dan Parameter

Simbol	Keterangan	Satuan
$E(t)$	Subpopulasi individu yang rentan untuk putus sekolah	Individu
$D(t)$	Subpopulasi individu yang terinfeksi sindrom putus sekolah	Individu
$R(t)$	Subpopulasi individu yang kembali bersekolah atau individu pulih	Individu
b	Tingkat kelahiran alami	$\frac{\text{Individu}}{\text{Waktu}}$
μ	Tingkat kematian alami	$\frac{1}{\text{Waktu}}$
α	Tingkat perpindahan dari status rentan ke status putus sekolah	$\frac{1}{\text{Individu Waktu}}$
β	Tingkat perpindahan dari status putus sekolah ke status pulih	$\frac{1}{\text{Waktu}}$

Adapun asumsi dalam model ini yaitu:

1. Putus sekolah dianggap sebagai krisis atau penyakit sosial epidemi dalam pendidikan.
2. Anak-anak yang lahir dalam kondisi sosial-ekonomi sulit tetap memiliki akses pendidikan.
3. Seperti dalam model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*), asumsi ini menyatakan bahwa anak-anak yang lahir dalam kondisi sosial-ekonomi sulit, berisiko tertular sindrom putus sekolah.
4. Korban yang terinfeksi putus sekolah menyebarkan sindrom ini kepada kelompok rentan sehingga berpindah ke kelompok yang terinfeksi putus sekolah.
5. Semua siswa yang diterima di sekolah akan menyelesaikan pendidikan mereka, kecuali jika mereka meninggal.

Dengan asumsi-asumsi ini, peneliti mencoba memodelkan putus sekolah sebagai masalah sosial yang bersifat epidemi dengan penularan yang dipengaruhi oleh faktor-faktor sosial seperti kemiskinan, pengaruh teman sebaya, dan kualitas pengajaran. Dalam model ini, anak-anak dalam kompartemen *Eligibility* (E) dianggap rentan dan dapat berpindah ke kompartemen *Dropout* (D) akibat pengaruh negatif dari faktor-faktor tersebut. Misalnya, kemiskinan orang tua dapat menghambat pembayaran biaya sekolah, kinerja akademik yang rendah dapat menurunkan motivasi, pengaruh teman sebaya mendorong anak meniru perilaku putus sekolah, atau hubungan buruk antara guru dan siswa menciptakan lingkungan belajar yang tidak kondusif.

Penelitian oleh Merani, dkk (2023) menunjukkan bahwa faktor utama yang mempengaruhi anak putus sekolah di

lingkungan Perumahan Buper Waena Kota Jayapura adalah lingkungan sosial, diikuti oleh faktor ekonomi, keluarga, kurangnya minat belajar, dan sarana prasarana sekolah. Faktor lingkungan sosial menjadi yang paling dominan karena anak-anak sering kali terpengaruh oleh teman sebaya yang juga putus sekolah, sehingga menciptakan pola perilaku negatif seperti keterlibatan dalam kegiatan kriminal, konsumsi alkohol, dan keengganan untuk melanjutkan pendidikan atau mencari pekerjaan. Dampak negatif ini meluas ke lingkungan sosial, menciptakan suasana yang tidak kondusif bagi perkembangan anak-anak lainnya.

Pola ini menunjukkan bahwa anak-anak yang bergaul dengan teman sebaya yang putus sekolah cenderung terpengaruh untuk mengambil keputusan yang sama. Dengan menggunakan model EDR dapat digunakan untuk menganalisis penyebaran fenomena putus sekolah dan dapat disesuaikan untuk berbagai masalah sosial lainnya. Selain itu, model ini memungkinkan pengembangan kebijakan pendidikan yang lebih efektif untuk mengurangi angka putus sekolah.

G. Anak Putus Sekolah

Pemerintah mengeluarkan peraturan tentang program belajar yang tertuang dalam Peraturan Pemerintah Nomor 47 Tahun 2008 mengenai Program Wajib Belajar 9 Tahun, yang merupakan implementasi dari Undang-Undang Nomor 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional. Wajib belajar sendiri merupakan program pendidikan dasar yang wajib diikuti oleh warga negara Indonesia dan menjadi tanggung jawab pemerintah baik pemerintah pusat maupun pemerintah daerah (Peraturan

Pemerintah No. 47, 2008). Pemerintah pusat telah mengubah peraturan mengenai program wajib belajar yang sebelumnya berlangsung selama 9 tahun menjadi 12 tahun. Perubahan ini bertujuan untuk memastikan kelanjutan dan keberhasilan program sebelumnya serta mempersiapkan generasi emas Indonesia pada tahun 2045. Program wajib belajar 12 tahun ini ditujukan kepada seluruh warga negara Indonesia yang berusia 7 hingga 18 tahun (Margiyanti & Maulia, 2023).

Program yang dirancang oleh pemerintah sebenarnya sangat baik jika diimplementasikan dengan optimal. Program wajib belajar 12 tahun bertujuan agar setiap generasi bangsa minimal menyelesaikan pendidikan hingga jenjang Sekolah Menengah Atas (SMA), sehingga dapat menciptakan generasi yang berkualitas dan berdaya saing. Namun, dalam kenyataannya program ini belum sepenuhnya efektif karena masih terdapat anak-anak yang putus sekolah (Margiyanti & Maulia, 2023).

Menurut Kaufman, putus sekolah didefinisikan sebagai siswa yang tidak mampu menyelesaikan program pendidikan hingga selesai atau yang gagal menuntaskan program belajar (Widiasanti, dkk., 2023). Sedangkan dalam Peraturan Bupati Rembang nomor 20 Tahun 2023 tentang Penanganan Anak Tidak Sekolah, anak putus sekolah didefinisikan sebagai siswa yang tidak mengikuti pelajaran selama 6 (enam) bulan berturut-turut atau lebih dan dinyatakan putus sekolah oleh satuan pendidikan sesuai dengan ketentuan yang berlaku serta siswa yang tidak melanjutkan jenjang pendidikan sampai tingkat menengah atas.

Putus sekolah merupakan masalah sosial, krisis, dan atau epidemi. Dengan kata lain, putus sekolah merupakan sindrom yang menyebar di setiap jenjang pendidikan (Obasuyi, 2020). Sindrom

putus sekolah menurut Bean (1985) sebagaimana dikutip oleh Kerby (2015) adalah keinginan yang didiskusikan secara terbuka untuk meninggalkan sekolah yang dibarengi dengan pengunduran diri yang sebenarnya. Sindrom putus sekolah yang terjadi di setiap jenjang pendidikan mencirikan kerentanan terhadap pendidikan yang tidak setara dan kemiskinan di masa depan (Obasuyi, 2020). Untuk itu, persoalan anak putus sekolah mendapatkan perhatian serius dari pemerintah salah satunya yaitu pemerintah Kabupaten Rembang yang mengadakan program GASPOL 12.

H. Program GASPOL 12

GASPOL 12 (Gerakan Ayo Sekolah 12 Tahun) adalah upaya yang terstruktur, menyeluruh, dan terencana yang melibatkan seluruh elemen bangsa secara bersama-sama. Tujuannya adalah dengan kesadaran, kemampuan, dan tanggung jawab bersama untuk mengembalikan anak-anak usia sekolah yang telah putus sekolah agar dapat melanjutkan pendidikan mereka hingga tuntas 12 tahun.

Adanya program GASPOL 12 merupakan upaya pemerintah Kabupaten Rembang dalam rangka penanganan anak tidak sekolah yang mana hal tersebut telah tercantum dalam Peraturan Bupati Rembang Nomor 20 Tahun 2023 mengenai Penanganan Anak yang Tidak Sekolah. Anak Tidak Sekolah (ATS) dikelompokkan menjadi tiga, yaitu anak belum pernah sekolah (sama sekali belum pernah sekolah baik formal maupun nonformal), anak putus sekolah (tidak tamat pada jenjang pendidikan tertentu), dan anak yang lulus tidak lanjut (tamat pada jenjang pendidikan tertentu tapi tidak melanjutkan ke jenjang berikutnya). Namun, dalam penelitian ini

hanya akan menggunakan data anak putus sekolah berupa putus sekolah karena tidak melanjutkan ke jenjang berikutnya maupun putus sekolah pada jenjang pendidikan tertentu.

Pelaksanaan GASPOL 12 dimulai dengan pendataan ATS melalui aplikasi SIPBM (Sistem Informasi Pembangunan Berbasis Masyarakat). Dalam menjalankan pendataan Anak Tidak Sekolah (ATS), Dinas Pendidikan Pemuda dan Olahraga Kabupaten Rembang bekerja sama dengan Pemerintah Desa/Kelurahan. Proses pendataan ini dilakukan setiap tahun menggunakan sistem informasi dan manajemen yang diatur melalui keputusan Bupati. Untuk itu, setiap tahunnya pendataan ATS difokuskan di beberapa wilayah yang ada di Kabupaten Rembang.

Setelah pendataan dilakukan, Dinas Pendidikan Pemuda dan Olahraga melakukan identifikasi Anak Tidak Sekolah (ATS). ATS kemudian dikelompokkan ke dalam beberapa kategori berdasarkan isu yang dihadapi.

1. Anak yang bekerja dan pekerja anak
2. Anak terlantar
3. Anak dalam perkawinan anak
4. Anak penyandang disabilitas
5. Anak yang mengalami kekerasan
6. Faktor ketidak mampuan ekonomi
7. Anak yang mengalami permasalahan sosial

Selanjutnya, dilakukan rekonfirmasi data ATS untuk memastikan apakah mereka bersedia kembali ke sekolah

atau tidak. Dalam upaya mengembalikan ATS, Pemerintah Kabupaten Rembang menyediakan fasilitas bagi ATS untuk kembali ke pendidikan formal, nonformal, sekolah inklusi yang telah ditetapkan, atau program vokasi terintegrasi. Selain itu, pemerintah juga menawarkan beasiswa sesuai dengan ketentuan hukum, advokasi, program orang tua asuh, serta merujuk ATS ke lembaga kesejahteraan sosial anak.

Penanganan Anak Tidak Sekolah (ATS) didanai melalui APBD (Anggaran Pendapatan dan Belanja Bulanan), APBDes (Anggaran Pendapatan dan Belanja Desa), dan sumber dana lainnya. Untuk mendukung pelaksanaan serta keberlanjutan program ini, Dinas Pendidikan Pemuda dan Olahraga menjalin kerja sama dengan berbagai pihak yang meliputi pembiayaan, penyediaan sarana dan prasarana, serta program orang tua asuh. Selain itu, dukungan untuk melanjutkan pendidikan diwujudkan melalui pemberian seragam, sepatu, buku, serta barang-barang lain sesuai kebutuhan siswa yang ditentukan melalui musyawarah desa (Peraturan Bupati Rembang No. 20, 2023).

I. Kajian Penelitian Terdahulu

Sebelumnya sudah banyak penelitian yang membahas mengenai dinamika anak putus sekolah. Berikut ini merupakan persamaan dan perbedaan dari beberapa penelitian yang dilakukan peneliti terdahulu dan penulis:

Tabel 2.4. Kajian Penelitian Terdahulu

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
1	<i>“Modelling Dropout Crisis in Education Distribution for Developing Economie with Replicative ‘SIR’ Model Educational Thought”</i> oleh Folorunso Obayemi Temitope OBASUYI tahun 2020	Penelitian ini memiliki kesamaan dengan penelitian yang akan dilakukan penulis karena sama-sama membahas pemodelan putus sekolah di negara berkembang.	Pada penelitian ini menggunakan model EDR (<i>Eligibility-Drop Out-Recovery</i>), sedangkan penelitian yang akan dilakukan penulis menggunakan model SIGR dengan kompartemen tambahan yaitu program GASPOL 12.
2	<i>“A Mathematical Model and Optimal Control Analysis for Scholar Drop Out”</i> oleh Ahmed Kourrad Amine Alabkari Khalid Adnaoui Fouad Lahmidi Youssef Tabit dan Abderrahim EL Adraoui tahun 2023	Penelitian ini memiliki kesamaan dengan penelitian penulis dalam membahas pemodelan putus sekolah.	Penelitian ini menggunakan model SDR (<i>Scholling-Drop Out-Recovery</i>) untuk memodelkan mahasiswa putus kuliah, dengan kompartemen R untuk pendidikan nonformal.

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
3	<i>"A Mathematical Model to Address Out-of-School Children Menace for Actualization of Sustainable Development in Nigeria"</i> oleh Abayomi Ayotunde Ayoade dan Philip Iyiola Farayola tahun 2022	Penelitian ini memiliki kesamaan dalam membahas pemodelan putus sekolah dan melibatkan program pemerintah.	Menggunakan model PEDDA (<i>Parents-Expose-Drop Out-Affected</i>), tidak ada kompartemen rentan, tetapi mengikutsertakan peran orang tua. Berbeda dengan model SIGR yang melibatkan program GASPOL 12.
4	<i>"Why do students quit school? Implications from a dynamical modelling study"</i> oleh Bechir Amdouni, Marlio Paredes, Christopher Kribs, dan Anuj Mubayi tahun 2017	Sama-sama membahas pemodelan putus sekolah.	Model PVFD (<i>Passing-Vulnerable-Failing-Drop Out</i>) dibagi menjadi kompartemen normal dan putus sekolah, dengan kompartemen rentan (V) dan gagal (F) yang tidak ada pada penelitian penulis.

No	Penelitian Terdahulu	Persamaan	Perbedaan
5	Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Strategi DOTS oleh Mustiko Rizki Ramadhan, dkk tahun 2018	Penelitian ini memiliki kesamaan dengan penelitian yang akan dilakukan oleh penulis, yaitu adanya kompartemen <i>treatment</i> dalam model matematikanya. Dalam kompartemen tersebut, individu yang menjalani <i>treatment</i> belum tentu sembuh sepenuhnya, melainkan ada kemungkinan untuk kembali ke kompartemen yang terinfeksi.	Penelitian ini menggunakan model matematika SEITR untuk kasus penyebaran penyakit tuberkulosis. Sementara itu, model matematika yang akan digunakan pada kasus penyebaran anak putus sekolah adalah model SIGR. Pada jurnal ini, <i>treatment</i> yang digunakan berupa strategi DOTS, sedangkan dalam penelitian yang akan dilakukan oleh penulis menggunakan <i>treatment</i> berupa intervensi program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang.

BAB III

Metodologi Penelitian

A. Metode Penelitian

Penelitian ini bagian dari pendekatan studi literatur yang dikenal sebagai penelitian kepustakaan. Penelitian kepustakaan merupakan serangkaian tindakan yang dilakukan dengan cara membaca, mengumpulkan, mengolah, dan menghasilkan kesimpulan dari bahan yang dipelajari (Wijoyo, dkk., 2021). Semua informasi dan pengetahuan yang ada di kepustakaan, termasuk bacaan, buku, referensi, dan hasil penelitian lainnya ditelaah dan diidentifikasi untuk tujuan penelitian ini.

B. Prosedur Penelitian

Untuk menjawab permasalahan yang ada, digunakan metode penelitian sebagai berikut:

1. Studi Literatur

Studi literatur adalah langkah pertama dalam mengumpulkan teori dan melihat literatur untuk menentukan masalah anak putus sekolah. Sumber referensi berupa buku, jurnal, artikel, tugas akhir, dan artikel terkait anak putus sekolah.

2. Mengkonstruksi model matematika

Pada tahap ini dilakukan penentuan asumsi awal dan variabel yang nantinya akan digunakan untuk membuat model matematika anak putus sekolah.

3. Menentukan titik ekuilibrium dan kestabilan lokal titik ekuilibrium

Pada langkah ini, setelah mendapatkan persamaan dari model matematika maka perlu menemukan titik ekuilibrium dan menentukan kestabilan titik ekuilibrium.

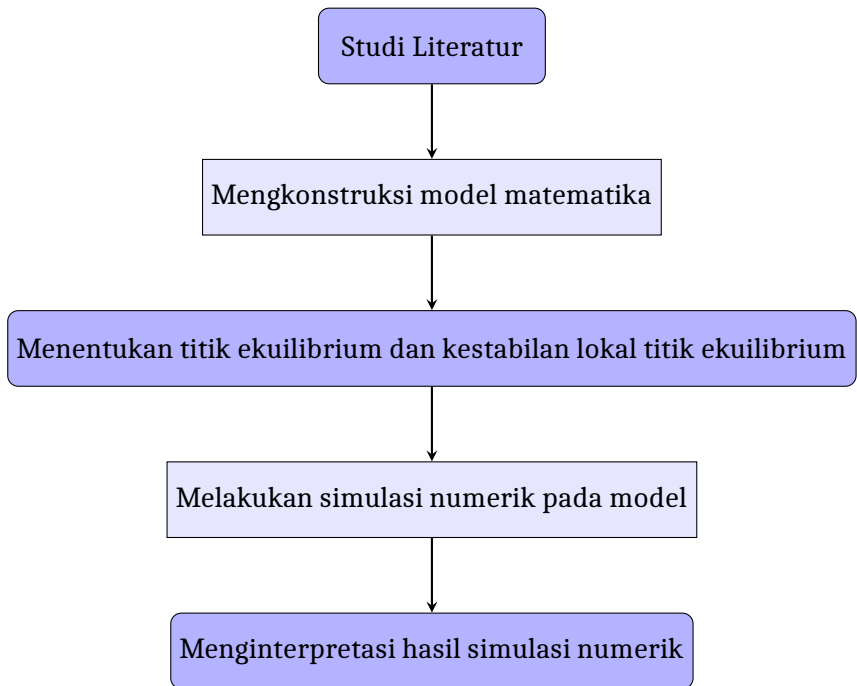
4. Melakukan simulasi numerik pada model

Dengan menggunakan bantuan MATLAB R2013a dan Maple 11, simulasi numerik dilakukan pada model matematika anak putus sekolah berdasarkan model.

5. Menginterpretasi hasil simulasi numerik

Melakukan interpretasi hasil simulasi numerik yang sudah dilakukan. Kemudian dari hasil temuan yang telah dibahas sebelumnya ditarik kesimpulan.

Diagram alur penelitian berikut menunjukkan proses penelitian yang akan dilakukan:



Gambar 3.1. Diagram Alur Penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang model matematika dinamika anak putus sekolah dengan program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang serta analisis dinamik dari model ini untuk menentukan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan dari titik ekuilibrium, dan simulasi numerik.

A. Konstruksi Model Matematika Anak Putus Sekolah Dengan Program GASPOL 12

Model matematika dalam penelitian ini merupakan pengembangan dari jurnal Obasuyi (2020) yang terdiri dari empat subpopulasi, yaitu subpopulasi yang rentan untuk putus sekolah (***Susceptible***), subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah (***Infected***), subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah dan mendapatkan program GASPOL 12 (***GASPOL***), dan subpopulasi yang kembali bersekolah baik sekolah formal maupun nonformal (***Recovered***). Berikut ini merupakan asumsi-asumsi yang digunakan dalam membentuk model:

1. Populasi anak usia sekolah yaitu 7-18 tahun dianggap tertutup yang mana tidak ada imigrasi atau emigrasi.
2. Anak putus sekolah yang kembali bersekolah baik secara formal maupun nonformal dianggap permanen karena tidak dapat kembali ke subpopulasi rentan ataupun subpopulasi terinfeksi sindrom putus sekolah.

3. Anak yang putus sekolah wajib mengikuti program GASPOL 12 sebelum mengambil keputusan untuk melanjutkan sekolah atau berhenti sekolah.
4. Untuk kembali bersekolah, maka anak putus sekolah harus mengikuti program GASPOL 12 terlebih dahulu.
5. Terdapat pengurangan jumlah individu pada setiap subpopulasi yang disebabkan karena faktor kelulusan, perpindahan sekolah, maupun kematian.
6. Terdapat dua kemungkinan terkait anak putus sekolah yang telah mengikuti program GASPOL 12 yaitu dapat kembali bersekolah atau tidak melanjutkan sekolah sehingga bisa kembali ke kompartemen I .
7. Anak usia sekolah rentan terifeksi sindrom putus sekolah melalui interaksi dengan anak-anak yang sudah putus sekolah.

Setelah menentukan asumsi awal, langkah selanjutnya yaitu mendefinisikan variabel dan parameter yang akan digunakan dalam model matematika dinamika anak putus sekolah dengan program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang yang dapat dilihat pada (4.1) dan (4.2) berikut:

Tabel 4.1. Variabel yang Digunakan dalam Membuat Model

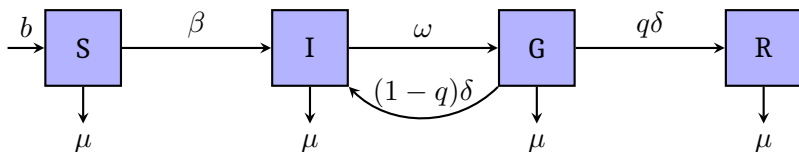
Variabel	Keterangan	Satuan	Syarat
$N(t)$	Jumlah populasi	Individu	$N(t) \geq 0$
$S(t)$	Subpopulasi yang rentan untuk putus sekolah	Individu	$S(t) \geq 0$
$I(t)$	Subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah	Individu	$I(t) \geq 0$
$G(t)$	Subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah dan mendapatkan program GASPOL 12	Individu	$G(t) \geq 0$
$R(t)$	Subpopulasi yang kembali bersekolah baik sekolah formal maupun nonformal	Individu	$R(t) \geq 0$

Tabel 4.2. Parameter Yang Digunakan Dalam Membuat Model

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
b	Laju bertambahnya individu berusia 7-18 tahun yang sudah memasuki usia sekolah	$\frac{\text{Individu}}{\text{Hari}}$	$b > 0$
β	Laju kontak antara subpopulasi rentan putus sekolah dengan subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah	$\frac{1}{\text{Hari Individu}}$	$\beta > 0$
μ	Laju berkurangnya individu pada subpopulasi karena faktor kelulusan, perpindahan sekolah, maupun kematian	$\frac{1}{\text{Hari}}$	$\mu > 0$

Parameter	Keterangan	Satuan	Syarat
ω	Laju perpindahan subpopulasi terinfeksi sindrom putus sekolah ke subpopulasi anak putus sekolah yang mendapatkan program GASPOL 12	$\frac{1}{\text{Hari}}$	$\omega > 0$
q	Proporsi individu anak putus sekolah yang mendapatkan program GASPOL 12 kembali ke sekolah	-	$0 \leq q \leq 1$
$(1 - q)$	Proporsi individu anak putus sekolah yang mendapatkan program GASPOL 12 kembali ke subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah	-	$0 \leq q \leq 1$
δ	Laju individu anak putus sekolah yang mengikuti program GASPOL 12 lalu kembali bersekolah	$\frac{1}{\text{Hari}}$	$\delta > 0$

Berdasarkan asumsi-asumsi, variabel, dan parameter yang ditentukan, maka selanjutnya akan dibentuk diagram dari model matematika dinamika anak putus sekolah dengan program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang pada Gambar 4.1 berikut:



Gambar 4.1. Diagram Transfer Model Matematika Dinamika Anak Putus Sekolah Dengan Program GASPOL 12 Di Kabupaten Rembang

Berdasarkan diagram transfer pada Gambar 4.1, dapat dijelaskan laju perubahan dari setiap subpopulasi sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = b - \beta SI - \mu S \quad (4.1)$$

Pada persamaan (4.1) merepresentasikan laju perubahan subpopulasi yang rentan untuk putus sekolah S pada waktu t yang bertambah karena adanya laju perekrutan menjadi individu rentan yang disimbolkan dengan b . Selain itu, laju subpopulasi S juga berkurang karena adanya interaksi antara subpopulasi yang rentan untuk putus sekolah S dengan subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah I dan disimbolkan dengan βSI sehingga menyebabkan individu rentan putus sekolah berpindah menjadi individu yang terinfeksi sindrom putus sekolah dan terdapat perpindahan individu dari subpopulasi S akibat kelulusan, perpindahan sekolah, maupun kematian yang disimbolkan dengan μS .

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI + (1 - q)\delta G - (\mu + \omega)I \quad (4.2)$$

Persamaan (4.2) merepresentasikan laju perubahan subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah I pada waktu t yang mengalami peningkatan jumlah karena adanya interaksi antara subpopulasi yang rentan untuk putus sekolah S dengan subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah I dan disimbolkan dengan βSI sehingga menyebabkan individu rentan putus sekolah berpindah menjadi individu yang terinfeksi sindrom putus sekolah. Laju subpopulasi I bertambah karena adanya peluang individu anak putus sekolah yang mendapatkan

program GASPOL 12 kembali ke subpopulasi I karena tidak ingin melanjutkan sekolah yang disimbolkan dengan $(1 - q)\delta G$. Selain itu, laju subpopulasi I juga mengalami pengurangan jumlah karena adanya perpindahan individu dari subpopulasi I akibat kelulusan, perpindahan sekolah, maupun kematian yang disimbolkan dengan μI ditambah dengan adanya laju perpindahan individu dari subpopulasi I menjadi subpopulasi G yang disimbolkan dengan ωI dikarenakan setiap individu yang putus sekolah harus mengikuti program GASPOL 12.

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= \omega I - (1 - q)\delta G - \mu G - q\delta G \\ \frac{dG}{dt} &= \omega I - \delta G + q\delta G - \mu G - q\delta G \\ \frac{dG}{dt} &= \omega I - (\delta + \mu)G\end{aligned}\tag{4.3}$$

Persamaan (4.3) merepresentasikan laju perubahan subpopulasi anak putus sekolah yang mendapatkan program GASPOL 12 (G) pada waktu t yang mengalami peningkatan jumlah karena adanya laju perpindahan individu dari subpopulasi I menjadi subpopulasi G yang disimbolkan dengan ωI dikarenakan setiap individu yang putus sekolah harus mengikuti program GASPOL 12. Serta mengalami pengurangan jumlah karena ada adanya perpindahan individu dari subpopulasi G akibat kelulusan, perpindahan sekolah, maupun kematian yang disimbolkan dengan μG ditambah dengan peluang individu anak putus sekolah yang mendapatkan program GASPOL 12 kembali ke subpopulasi I karena tidak ingin melanjutkan sekolah yang disimbolkan dengan $(1 - q)\delta G$ dan adanya individu anak putus sekolah yang mendapatkan program GASPOL 12 berpindah ke subpopulasi R

karena ingin melanjutkan sekolah yang disimbolkan dengan $q\delta G$.

$$\frac{dR}{dt} = q\delta G - \mu R \quad (4.4)$$

Persamaan (4.4) merepresentasikan laju perubahan subpopulasi anak putus sekolah yang kembali bersekolah R pada waktu t yang bertambah jumlah karena adanya peluang individu anak putus sekolah yang mendapatkan program GASPOL 12 berpindah ke subpopulasi R karena ingin melanjutkan sekolah yang disimbolkan dengan $q\delta G$. Serta mengalami pengurangan jumlah karena adanya perpindahan individu dari subpopulasi R akibat kelulusan, perpindahan sekolah, maupun kematian yang disimbolkan dengan μR .

Sehingga model matematika yang dapat dibentuk berdasarkan persamaan (4.1), (4.2), (4.3), dan (4.4) berupa sistem otonomus nonlinier yang dapat dilihat pada sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \beta SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI + (1 - q)\delta G - (\mu + \omega)I \\ \frac{dG}{dt} = \omega I - (\delta + \mu)G \\ \frac{dR}{dt} = q\delta G - \mu R \end{cases} \quad (4.5)$$

Dengan kondisi awal

$$S(0) \geq 0, I(0) \geq 0, G(0) \geq 0, R(0) \geq 0$$

dan total individu dalam populasi didefinisikan sebagai $N(t) = S(t) + I(t) + G(t) + R(t)$.

B. Solusi Nonnegatif dan Terbatas

Karena setiap variabel dari sistem persamaan (4.1), (4.2), (4.3) dan (4.4) merupakan subpopulasi manusia, sehingga perlu menunjukkan bahwa semua variabel $S(t)$, $I(t)$, $G(t)$, dan $R(t)$ positif untuk setiap $t > 0$.

Teorema 4.2.1 (Solusi Nonnegatif)

Jika $S(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$, $G(0) \geq 0$, dan $R(0) \geq 0$, maka himpunan solusi $\{S(t), I(t), G(t), \text{ dan } R(t)\}$ dari persamaan (4.1) sampai (4.4) terdiri atas bilangan real tak negatif untuk setiap $t > 0$.

Bukti. Akan dibuktikan bahwa solusi dari persamaan (4.1) sampai (4.4) positif.

1. Akan dibuktikan bahwa persamaan (4.1) memiliki solusi positif.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= b - \beta SI - \mu S \\
 \iff \frac{dS}{dt} &\geq -(\beta I + \mu) S \\
 \iff \frac{dS}{S} &\geq (\beta I + \mu) dt \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

Persamaan (4.6) merupakan persamaan diferensial. Untuk memperoleh solusi digunakan metode variabel terpisah. Langkah selanjutnya, ruas kiri diintegrasikan terhadap S dan ruas kanan diintegrasikan terhadap t sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& \int \frac{1}{S} dS \geq \int -(\beta I + \mu) dt \\
& \iff \ln|S| \geq -(\beta I + \mu)t + c, c \text{ konstanta} \\
& \iff e^{\ln|S|} \geq e^{-t(\beta I + \mu) + c} \\
& \iff e^{\ln|S|} \geq e^{-t(\beta I + \mu)} e^c, \text{ misal } Z = e^c \text{ dan } Z \text{ adalah konstanta} \\
& \iff S(t) \geq Z e^{-t(\beta I + \mu)} \\
& \quad \text{karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t(\beta I + \mu)} = 0 \\
& \iff S(t) \geq Z(0) \\
& \iff S(t) \geq 0
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $S(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

2. Akan dibuktikan bahwa persamaan (4.2) memiliki solusi positif.

$$\begin{aligned}
& \frac{dI}{dt} = \beta SI + (1 - q)\delta G - (\mu + \omega)I \\
& \iff \frac{dI}{dt} \geq -(\mu + \omega)I \\
& \iff \frac{dI}{I} \geq -(\mu + \omega)dt \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.7) merupakan persamaan diferensial. Untuk memperoleh solusi digunakan metode variabel terpisah. Langkah selanjutnya, ruas kiri diintegrasikan terhadap I dan ruas kanan diintegrasikan terhadap t sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dI}{I} \geq \int -(\mu + \omega) dt \\
& \iff \ln|I| \geq -(\mu + \omega)t + c, c \text{ konstanta} \\
& \iff e^{\ln|I|} \geq e^{-(\mu + \omega)t + c} \\
& \iff e^{\ln|I|} \geq e^{-(\mu + \omega)t} e^c, \text{ misal } Z = e^c \text{ dan } Z \text{ adalah konstanta} \\
& \iff I(t) \geq Z e^{-t(\mu + \omega)} \\
& \quad \text{Karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t(\mu + \omega)} = 0 \\
& \iff I(t) \geq Z(0) \\
& \iff I(t) \geq 0
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $I(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

3. Akan dibuktikan bahwa persamaan (4.3) memiliki solusi positif.

$$\begin{aligned}
& \frac{dG}{dt} = \omega I - (\delta + \mu)G \\
& \iff \frac{dG}{dt} \geq -(\delta + \mu)G \\
& \iff \frac{dG}{G} \geq -(\delta + \mu)dt \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.8) merupakan persamaan diferensial. Untuk memperoleh solusi digunakan metode variabel terpisah. Langkah selanjutnya, ruas kiri diintegrasikan terhadap G dan ruas kanan diintegrasikan terhadap t sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dG}{G} \geq \int -(\delta + \mu) dt \\
& \iff \ln|G| \geq -(\delta + \mu)t + c, c \text{ konstanta} \\
& \iff e^{\ln|G|} \geq e^{-(\delta + \mu)t + c} \\
& \iff e^{\ln|G|} \geq e^{-(\delta + \mu)t} e^c, \text{ misal } Z = e^c \text{ dan } Z \text{ adalah konstanta} \\
& \iff G(t) \geq Z e^{-t(\delta + \mu)} \\
& \quad \text{Karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t(\delta + \mu)} = 0 \\
& \iff G(t) \geq Z(0) \\
& \iff G(t) \geq 0
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $G(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

4. Akan dibuktikan bahwa persamaan (4.4) memiliki solusi positif.

$$\begin{aligned}
& \frac{dR}{dt} = q\delta G - \mu R \\
& \iff \frac{dR}{dt} \geq -\mu R \\
& \iff \frac{dR}{R} \geq -\mu dt \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.9) merupakan persamaan diferensial. Untuk memperoleh solusi digunakan metode variabel terpisah. Langkah selanjutnya ruas kiri diintegrasikan terhadap R dan ruas kanan diintegrasikan terhadap t sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dR}{R} \geq \int -\mu dt \\
& \iff \ln|R| \geq -\mu t + c, c \text{ konstanta} \\
& \iff e^{\ln|R|} \geq e^{-\mu t + c} \\
& \iff e^{\ln|R|} \geq e^{-\mu t} e^c, \text{ misal } Z = e^c \text{ dan } Z \text{ adalah konstanta} \\
& \iff R(t) \geq Z e^{-t\mu} \\
& \quad \text{Karena } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t\mu} = 0 \\
& \iff R(t) \geq Z(0) \\
& \iff R(t) \geq 0
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $R(t) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$.

Oleh karena itu, terbukti bahwa persamaan (4.1) sampai (4.4) memiliki solusi yang positif.



Teorema 4.2.2 (Solusi Terbatas)

Himpunan solusi $\{S(t), I(t), G(t), R(t)\}$ dari persamaan (4.1) sampai persamaan (4.4) dengan kondisi awal ($t = 0$) terbatas pada daerah

$$\Omega = \left\{ (S(t), I(t), G(t), R(t)) \in \mathbb{R}_+^4 : 0 \leq N(t) \leq \frac{b}{\mu} \right\}$$

Bukti. Jumlah populasi persamaan (4.1) sampai (4.4) yaitu $N(t) = S(t) + I(t) + G(t) + R(t)$. Selanjutnya turunkan N terhadap t

sehingga diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dG}{dt} + \frac{dR}{dt}$$

Lalu substitusikan persamaan (4.1), (4.2), (4.3), dan (4.4) ke dalam persamaan $\frac{dN}{dt}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dG}{dt} + \frac{dR}{dt} \\ \iff \frac{dN}{dt} &= b - \beta SI - \mu S + \beta SI + (1 - q)\delta G \\ &\quad - (\mu + \omega)I + \omega I - (\delta + \mu)G + q\delta G - \mu R \\ \iff \frac{dN}{dt} &= b - (\mu S + \mu I + \mu G + \mu R) \\ \iff \frac{dN}{dt} &= b - \mu(S + I + G + R) \\ \iff \frac{dN}{dt} &= b - \mu N \\ \iff \frac{dN}{b - \mu N} &= dt \end{aligned} \tag{4.10}$$

Untuk mendapatkan solusi umum $N(t)$ dari persamaan (4.10) digunakan metode pemisahan variabel yaitu N dan t , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dN}{b - \mu N} = \int dt \\
\iff & -\frac{1}{\mu} \ln|b - \mu N| = t + c \\
\iff & \ln|b - \mu N| = -\mu t + c, c \text{ konstanta} \\
\iff & e^{\ln|b - \mu N|} = e^{-\mu t} e^c, \text{ misal } Z = e^c \text{ dan } Z \text{ adalah konstanta} \\
\iff & \mu N(t) - b = Ze^{-\mu t} \\
\iff & \mu N(t) = Ze^{-\mu t} + b \\
\iff & N(t) = Z \frac{e^{-\mu t}}{\mu} + \frac{b}{\mu}
\end{aligned}$$

karena

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} Z \frac{e^{-\mu t}}{\mu} + \frac{b}{\mu} \\
\iff &= \lim_{t \rightarrow \infty} Z \frac{e^{-\mu t}}{\mu} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b}{\mu} \\
\iff &= 0 + \frac{b}{\mu} \\
\iff &= \frac{b}{\mu}
\end{aligned}$$

sehingga

$$N(t) \leq \frac{b}{\mu}$$

Berdasarkan teorema (4.2.2), diketahui bahwa $N(t) \geq 0$ dengan $N(t) = S(t) + I(t) + G(t) + R(t)$. Dengan demikian, terbukti bahwa himpunan

$$\Omega = \left\{ (S(t), I(t), G(t), R(t)) \in \mathbb{R}_+^4 : 0 \leq N(t) \leq \frac{b}{\mu} \right\}$$

merupakan batas solusi dari persamaan (4.1) sampai (4.4). ■

C. Titik Ekuilibrium

Akan ditentukan titik ekuilibrium dari model matematika dinamika anak putus sekolah dengan program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang. Menurut definisi titik ekuilibrium, sistem (4.5) dikatakan berada pada keadaan stabil jika memenuhi

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dG}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0.$$

1. Titik Ekuilibrium Yang Bebas Dari Anak Putus Sekolah

Titik ekuilibrium yang bebas dari anak putus sekolah didefinisikan sebagai $E^0 = (S^0, I^0, G^0, R^0)$. Untuk menentukan titik ekuilibrium yang bebas dari anak putus sekolah, terdapat suatu kondisi dimana tidak terdapat anak putus sekolah atau bisa dikatakan bahwa $I^0 = 0$. Substitusikan $I^0 = 0$ ke dalam persamaan (4.1) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} b - \beta S^0 I^0 - \mu S^0 &= 0 \\ \iff b - \beta S^0(0) - \mu S^0 &= 0 \\ \iff b - \mu S^0 &= 0 \\ \iff b &= \mu S^0 \\ \iff \frac{b}{\mu} &= S^0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Selanjutnya $I^0 = 0$ akan disubstitusikan ke dalam persamaan (4.3)

dan didapatkan

$$\begin{aligned}
 \omega I^0 - (\delta + \mu)G^0 &= 0 \\
 \iff \omega(0) - (\delta + \mu)G^0 &= 0 \\
 \iff -(\delta + \mu)G^0 &= 0 \\
 \iff \frac{0}{-(\delta + \mu)} &= G^0 \\
 \iff 0 &= G^0
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

kemudian dengan menyubtitusikan $I^0 = 0$ ke dalam persamaan (4.4) diperoleh

$$\begin{aligned}
 q\delta I^0 - \mu R^0 &= 0 \\
 \iff q\delta(0) - \mu R^0 &= 0 \\
 \iff -\mu R^0 &= 0 \\
 \iff \frac{0}{-\mu} &= R^0 \\
 \iff 0 &= R^0
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Jadi, titik ekuilibrium yang bebas dari anak putus sekolah yaitu $E^0(S^0, I^0, G^0, R^0) = (\frac{b}{\mu}, 0, 0, 0)$. Titik ekuilibrium E^0 menjelaskan bahwa pada kondisi yang tidak mengalami perubahan, jumlah subpopulasi yang rentan untuk putus sekolah sebesar $(\frac{b}{\mu})$, dan subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah, subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah dan mendapatkan program GASPOL 12, serta subpopulasi yang kembali bersekolah tidak ada. Jadi, titik ekuilibrium E^0 dikatakan selalu eksis karena memiliki solusi yaitu $S^0, I^0, G^0, R^0 \geq 0$.

2. Titik Ekuilibrium Endemik Anak Putus Sekolah

Titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah didefinisikan sebagai $E_1 = (S^*, I^*, G^*, R^*)$ merupakan kondisi dimana terdapat anak putus sekolah atau $I^* \neq 0$. Dari persamaan (4.1) diperoleh

$$\begin{aligned}
 b - \beta S^* I^* - \mu S^* &= 0 \\
 \Leftrightarrow b - S^* (\beta I^* + \mu) &= 0 \\
 \Leftrightarrow b &= S^* (\beta I^* + \mu) \\
 \Leftrightarrow \frac{b}{(\beta I^* + \mu)} &= S^* \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, dari persamaan (4.3) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \omega I^* - (\delta + \mu) G^* &= 0 \\
 \Leftrightarrow \omega I^* &= (\delta + \mu) G^* \\
 \Leftrightarrow \frac{\omega I^*}{(\delta + \mu)} &= G^* \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (4.4), diperoleh

$$\begin{aligned}
 q\delta G^* - \mu R^* &= 0 \\
 \Leftrightarrow q\delta G^* &= \mu R^* \\
 \Leftrightarrow \frac{q\delta G^*}{\mu} &= R^* \\
 \Leftrightarrow \frac{q\delta \frac{\omega I^*}{(\delta + \mu)}}{\mu} &= R^* \\
 \Leftrightarrow \frac{q\delta}{\mu} \frac{\omega I^*}{(\delta + \mu)} &= R^* \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Setelah diperoleh (4.14) dan (4.15), lalu substitusikan ke dalam persamaan (4.2)

$$\begin{aligned}
 & \beta S^* I^* + (1 - q) \delta G^* - (\mu + \omega) I^* = 0 \\
 \iff & \beta \frac{b}{(\beta I^* + \mu)} I^* + (1 - q) \delta \frac{\omega I^*}{(\delta + \mu)} - (\mu + \omega) I^* = 0 \\
 \iff & I^* \left(\beta \frac{b}{(\beta I^* + \mu)} + (1 - q) \delta \frac{\omega}{(\delta + \mu)} - (\mu + \omega) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

sehingga diperoleh

$$I^* = 0 \tag{4.18}$$

atau

$$\left(\beta \frac{b}{(\beta I^* + \mu)} + (1 - q) \delta \frac{\omega}{(\delta + \mu)} - (\mu + \omega) \right) = 0 \tag{4.19}$$

Karena $I^* \neq 0$, maka

$$\begin{aligned}
 & \beta \frac{b}{(\beta I^* + \mu)} + (1 - q) \delta \frac{\omega}{(\delta + \mu)} - (\mu + \omega) = 0 \\
 \iff & \frac{\beta b(\delta + \mu) + (1 - q) \delta \omega (\beta I^* + \mu) - (\mu + \omega)(\beta I^* + \mu)(\delta + \mu)}{(\beta I^* + \mu)(\delta + \mu)} = 0
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Selanjutnya kedua ruas dari persamaan (4.20) dikalikan dengan $(\beta I^* + \mu)(\delta + \mu)$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 & \beta b(\delta + \mu) + (1 - q) \delta \omega (\beta I^* + \mu) - (\mu + \omega)(\beta I^* + \mu)(\delta + \mu) = 0 \\
 \iff & \beta b(\delta + \mu) + (1 - q) \delta \omega \beta I^* + (1 - q) \delta \omega \mu - \left[(\beta \mu I^* + \mu^2 + \beta \omega I^* + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega\mu \Big) (\delta + \mu) \Big] = 0 \\
\Longleftrightarrow & \beta b (\delta + \mu) + \delta\omega\beta I^* - \delta\omega q\beta I^* + \delta\omega\mu - \delta\omega q\mu - \left[\beta\mu\delta I^* + \mu^2\delta + \beta\omega\delta I^* + \right. \\
& \left. \omega\delta\mu + \beta\mu^2 I^* + \mu^3 + \beta\omega\mu I^* + \omega\mu^2 \right] = 0 \\
\Longleftrightarrow & \beta b (\delta + \mu) + \delta\omega\beta I^* - \delta\omega q\beta I^* + \delta\omega\mu - \delta\omega q\mu - \beta\mu\delta I^* - \mu^2\delta - \\
& \beta\omega\delta I^* - \omega\delta\mu - \beta\mu^2 I^* - \mu^3 - \beta\omega\mu I^* - \omega\mu^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow & \left[\beta b (\delta + \mu) + \delta\omega\mu - \delta\omega q\mu - \mu^2\delta - \mu^3 - \omega\delta\mu - \omega\mu^2 \right] - I^* \left[-\delta\omega\beta + \right. \\
& \left. \delta\omega q\beta + \beta\mu\delta + \beta\omega\delta + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu \right] = 0 \\
\Longleftrightarrow & \left[\beta b (\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \mu^2\delta - \mu^3 - \omega\mu^2 \right] - I^* \left[\delta\omega q\beta + \beta\mu\delta + \beta\mu^2 + \right. \\
& \left. \beta\omega\mu \right] = 0 \\
\Longleftrightarrow & \left[\beta b (\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \mu^2\delta - \mu^3 - \omega\mu^2 \right] = I^* \left[\delta\omega q\beta + \beta\mu\delta + \beta\mu^2 + \right. \\
& \left. \beta\omega\mu \right] \\
\Longleftrightarrow & \frac{\beta b (\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \mu^2\delta - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\mu\delta + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu} = I^* \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Setelah itu, substitusikan (4.21) ke dalam persamaan (4.14)

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 S^* &= \frac{b}{(\beta I^* + \mu)} \\
 \iff &= \frac{b}{\left(\beta \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta \omega q \mu - \delta \mu^2 - \mu^3 - \omega \mu^2}{\beta \delta \omega q + \beta \delta \mu + \beta \mu^2 + \beta \omega \mu} + \mu \right)} \\
 \iff &= \frac{b}{\left(\frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta \omega q \mu - \delta \mu^2 - \mu^3 - \omega \mu^2}{\delta \omega q + \delta \mu + \mu^2 + \omega \mu} + \mu \right)} \\
 \iff &= \frac{b}{\frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta \omega q \mu - \delta \mu^2 - \mu^3 - \omega \mu^2 + \delta \omega q \mu + \delta \mu^2 + \mu^3 + \omega \mu^2}{\delta \omega q + \delta \mu + \mu^2 + \omega \mu}} \\
 \iff &= \frac{b}{\frac{\beta b(\delta + \mu)}{\delta \omega q + \delta \mu + \mu^2 + \omega \mu}} \\
 \iff &= \frac{b(\delta \omega q + \delta \mu + \mu^2 + \omega \mu)}{\beta b(\delta + \mu)} \\
 \iff &= \frac{(\delta \omega q + \delta \mu + \mu^2 + \omega \mu)}{\beta(\delta + \mu)} \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

Lalu substitusikan (4.21) ke dalam persamaan (4.15), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 G^* &= \frac{\omega I^*}{(\delta + \mu)} \\
 \iff &= \frac{\omega}{(\delta + \mu)} \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta \omega q \mu - \delta \mu^2 - \mu^3 - \omega \mu^2}{\beta \delta \omega q + \beta \delta \mu + \beta \mu^2 + \beta \omega \mu} \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

Substitusikan (4.21) ke dalam persamaan (4.16), sehingga

diperoleh

$$R^* = \frac{q\delta}{\mu} \frac{\omega I^*}{(\delta + \mu)}$$

$$\iff = \frac{q\delta\omega}{\mu(\delta + \mu)} \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu} \quad (4.24)$$

Jadi, titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah yaitu $E_1 = (S^*, I^*, G^*, R^*)$ dimana

$$S^* = \frac{\delta\omega q + \delta\mu + \mu^2 + \omega\mu}{\beta(\delta + \mu)},$$

$$I^* = \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu},$$

$$G^* = \frac{\omega}{\delta + \mu} \cdot \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu},$$

$$R^* = \frac{q\delta\omega}{\mu(\delta + \mu)} \cdot \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu}.$$

Titik ekuilibrium E_1 menjelaskan bahwa pada kondisi yang tidak mengalami perubahan, jumlah subpopulasi yang rentan untuk putus sekolah sebesar $(\frac{\delta\omega q + \delta\mu + \mu^2 + \omega\mu}{\beta(\delta + \mu)})$, subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah $(\frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu})$, subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah dan mendapatkan program GASPOL 12 sebesar $(\frac{\omega}{\delta + \mu} \cdot \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu})$, dan subpopulasi yang kembali ke sekolah sebesar $(\frac{q\delta\omega}{\mu(\delta + \mu)} \cdot \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu})$. Titik ekuilibrium E_1 dikatakan eksis jika $\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2 > 0$.

D. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar pada sistem (4.5), maka digunakan metode matriks generasi selanjutnya (*Next Generation Matrix*). Dengan metode ini, didefinisikan matriks F sebagai turunan dari laju munculnya kasus baru sindrom anak putus sekolah yang berasal dari individu pada subpopulasi terinfeksi. Sedangkan matriks V sebagai turunan dari laju perpindahan individu keluar dari subpopulasi terinfeksi akibat penularan, kesembuhan, atau kematian.

Pada model ini, subpopulasi yang dianggap terinfeksi sindrom putus sekolah adalah subpopulasi I dan G , sehingga persamaan yang digunakan adalah:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \beta SI + (1 - q)\delta G - (\mu + \omega)I \\ \frac{dG}{dt} &= \omega I - (\delta + \mu)G\end{aligned}$$

Hal ini dikarenakan subpopulasi $I(t)$ dan $G(t)$ merupakan subpopulasi aktif yang mempengaruhi dinamika penyebaran sindrom putus sekolah. Selanjutnya, untuk melinierkan sistem terhadap subpopulasi yang terinfeksi pada titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah, maka diperoleh matriks Jacobian dari persamaan $\frac{dI}{dt}$ dan $\frac{dG}{dt}$, yaitu

$$\begin{aligned}D_f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \frac{dI}{dt}}{\partial I} & \frac{\partial \frac{dI}{dt}}{\partial G} \\ \frac{\partial \frac{dG}{dt}}{\partial I} & \frac{\partial \frac{dG}{dt}}{\partial G} \end{pmatrix} \\ \iff &= \begin{pmatrix} \beta S - (\mu + \omega) & (1 - q)\delta \\ \omega & -(\delta + \mu) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar digunakan titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah. Substitusikan $E^0 = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ ke dalam persamaan (4.25) sehingga diperoleh

$$D_f(E^0) = \begin{pmatrix} \beta \left(\frac{b}{\mu}\right) - (\mu + \omega) & (1 - q)\delta \\ \omega & -(\delta + \mu) \end{pmatrix}$$

Dalam kerangka *Next Generation Matrix*, Jacobian ini dapat direpresentasikan sebagai selisih dua matriks

$$D_f(E^0) = F - V$$

dengan:

$$F = \begin{pmatrix} \beta \left(\frac{b}{\mu}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad V = \begin{pmatrix} (\mu + \omega) & -(1 - q)\delta \\ -\omega & (\delta + \mu) \end{pmatrix}$$

Langkah berikutnya adalah menghitung invers dari matriks V dan diperoleh

$$\begin{aligned} V^{-1} &= \frac{1}{\det V} \text{adj} V \\ \Leftrightarrow V^{-1} &= \frac{1}{(\mu + \omega)(\delta + \mu)} \begin{pmatrix} (\delta + \mu) & (1 - q)\delta \\ \omega & (\mu + \omega) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Akan dicari matriks generasi selanjutnya yang dinyatakan dengan $K = FV^{-1}$ sehingga didapat

$$\begin{aligned} K &= FV^{-1} \\ \Leftrightarrow &= \begin{pmatrix} \beta \left(\frac{b}{\mu}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(\mu + \omega)(\delta + \mu)} \begin{pmatrix} (\delta + \mu) & (1 - q)\delta \\ \omega & (\mu + \omega) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow &= \begin{pmatrix} \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(\delta+\mu)}{(\mu+\omega)(\delta+\mu)} & \frac{(1-q)\delta}{(\mu+\omega)(\delta+\mu)} \\ \frac{\omega}{(\mu+\omega)(\delta+\mu)} & \frac{(\mu+\omega)}{(\mu+\omega)(\delta+\mu)} \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow &= \begin{pmatrix} \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)(\delta+\mu)}{(\mu+\omega)(\delta+\mu)} & \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)(1-q)\delta}{(\mu+\omega)(\delta+\mu)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow &= \begin{pmatrix} \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)}{(\mu+\omega)} & \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)(1-q)\delta}{(\mu+\omega)(\delta+\mu)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, R_0 akan diperoleh dari perhitungan $R_0 = \rho(K)$, dimana $\rho(K)$ merupakan modulus maksimal dari nilai eigen matriks K . Untuk memperoleh nilai eigen dari matriks K , maka akan dicari $\det(K - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\det(K - \lambda I) = 0 \\
\Longleftrightarrow \det &\left(\begin{pmatrix} \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)}{(\mu+\omega)} & \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)(1-q)\delta}{(\mu+\omega)(\delta+\mu)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \\
\Longleftrightarrow \det &\left(\begin{pmatrix} \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)}{(\mu+\omega)} & \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)(1-q)\delta}{(\mu+\omega)(\delta+\mu)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = 0 \\
\Longleftrightarrow \det &\begin{pmatrix} \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)}{(\mu+\omega)} - \lambda & \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)(1-q)\delta}{(\mu+\omega)(\delta+\mu)} \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \\
\Longleftrightarrow \left(\frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)}{(\mu+\omega)} - \lambda \right) &(-\lambda) - (0) \left(\frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)(1-q)\delta}{(\mu+\omega)(\delta+\mu)} \right) = 0 \\
\Longleftrightarrow \left(\frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)}{(\mu+\omega)} - \lambda \right) &(-\lambda) = 0
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
-\lambda = 0 \quad \text{atau} \quad &\left(\frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)}{(\mu+\omega)} - \lambda \right) = 0 \\
\Longleftrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{atau} \quad &\Longleftrightarrow \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu} \right)}{(\mu+\omega)} = \lambda_2
\end{aligned}$$

Karena R_0 merupakan modulus maksimal dari nilai eigen matriks

K , maka R_0 merupakan nilai eigen terbesar dari matriks K yaitu $\lambda_2 = \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu}\right)}{(\mu + \omega)}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\beta \left(\frac{b}{\mu}\right)}{(\mu + \omega)} \\ \iff &= \frac{\beta b}{\mu(\mu + \omega)} \end{aligned} \quad (4.26)$$

E. Analisis Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium

Sistem (4.5) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier. Oleh karena itu, untuk menentukan kestabilan dari sistem dilakukan proses linearisasi dengan membentuk hampiran sistem persamaan diferensial linier melalui penurunan matriks Jacobian dari sistem (4.5). Kestabilan yang diperoleh dengan proses linearisasi sistem yaitu kestabilan lokal. Untuk menentukan matriks Jacobian dari sistem (4.5) sebagai berikut

$$D_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial S} & \frac{\partial S}{\partial I} & \frac{\partial S}{\partial G} & \frac{\partial S}{\partial R} \\ \frac{\partial I}{\partial S} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial I}{\partial G} & \frac{\partial I}{\partial R} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} & \frac{\partial G}{\partial G} & \frac{\partial G}{\partial R} \\ \frac{\partial R}{\partial S} & \frac{\partial R}{\partial I} & \frac{\partial R}{\partial G} & \frac{\partial R}{\partial R} \end{pmatrix}$$

Akan ditentukan elemen-elemen pada baris pertama dari matriks Jacobian sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad \frac{\partial S}{\partial S} = \frac{\partial(b - \beta SI - \mu S)}{\partial S} \\
 \iff & \frac{\partial S}{\partial S} = -\beta I - \mu \\
 & \bullet \quad \frac{\partial S}{\partial I} = \frac{\partial(b - \beta SI - \mu S)}{\partial I} \\
 \iff & \frac{\partial S}{\partial I} = -\beta S \\
 & \bullet \quad \frac{\partial S}{\partial G} = \frac{\partial(b - \beta SI - \mu S)}{\partial G} \\
 \iff & \frac{\partial S}{\partial G} = 0 \\
 & \bullet \quad \frac{\partial S}{\partial R} = \frac{\partial(b - \beta SI - \mu S)}{\partial R} \\
 \iff & \frac{\partial S}{\partial R} = 0
 \end{aligned}$$

Selanjutnya ditentukan elemen-elemen pada baris kedua dari matriks Jacobian.

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad \frac{\partial I}{\partial S} = \frac{\partial(\beta SI + (1 - q)\delta G - (\mu + \omega)I)}{\partial S} \\
 \iff & \frac{\partial I}{\partial S} = \beta I \\
 & \bullet \quad \frac{\partial I}{\partial I} = \frac{\partial(\beta SI + (1 - q)\delta G - (\mu + \omega)I)}{\partial I} \\
 \iff & \frac{\partial I}{\partial I} = \beta S - (\mu + \omega) \\
 & \bullet \quad \frac{\partial I}{\partial G} = \frac{\partial(\beta SI + (1 - q)\delta G - (\mu + \omega)I)}{\partial G} \\
 \iff & \frac{\partial I}{\partial G} = (1 - q)\delta \\
 & \bullet \quad \frac{\partial I}{\partial R} = \frac{\partial(\beta SI + (1 - q)\delta G - (\mu + \omega)I)}{\partial R} \\
 \iff & \frac{\partial I}{\partial R} = 0
 \end{aligned}$$

Akan ditentukan elemen-elemen pada baris ketiga dari matriks Jacobian.

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad \frac{\partial G}{\partial S} = \frac{\partial(\omega I - (\delta + \mu)G)}{\partial S} \\
 \iff & \frac{\partial G}{\partial S} = 0 \\
 & \bullet \quad \frac{\partial G}{\partial I} = \frac{\partial(\omega I - (\delta + \mu)G)}{\partial I} \\
 \iff & \frac{\partial G}{\partial I} = \omega \\
 & \bullet \quad \frac{\partial G}{\partial G} = \frac{\partial(\omega I - (\delta + \mu)G)}{\partial G} \\
 \iff & \frac{\partial G}{\partial G} = -(\delta + \mu) \\
 & \bullet \quad \frac{\partial G}{\partial R} = \frac{\partial(\omega I - (\delta + \mu)G)}{\partial R} \\
 \iff & \frac{\partial G}{\partial R} = 0
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, ditentukan elemen-elemen pada baris keempat dari matriks Jacobian.

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad \frac{\partial R}{\partial S} = \frac{\partial(q\delta G - \mu R)}{\partial S} \\
 \iff & \frac{\partial R}{\partial S} = 0 \\
 & \bullet \quad \frac{\partial R}{\partial I} = \frac{\partial(q\delta G - \mu R)}{\partial I} \\
 \iff & \frac{\partial R}{\partial I} = 0 \\
 & \bullet \quad \frac{\partial R}{\partial G} = \frac{\partial(q\delta G - \mu R)}{\partial G} \\
 \iff & \frac{\partial R}{\partial G} = q\delta \\
 & \bullet \quad \frac{\partial R}{\partial R} = \frac{\partial(q\delta G - \mu R)}{\partial R} \\
 \iff & \frac{\partial R}{\partial R} = -\mu
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut

$$D_f = \begin{pmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S & 0 & 0 \\ \beta I & \beta S - (\mu + \omega) & (1-q)\delta & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & q\delta & -\mu \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

1. Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Bebas Anak Putus Sekolah

Titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah, yaitu $(E^0 = \frac{b}{\mu}, 0, 0, 0)$ akan disubstitusikan ke dalam matriks Jacobian (4.27) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} D_f(E^0) &= \begin{pmatrix} -\beta(0) - \mu & -\beta\left(\frac{b}{\mu}\right) & 0 & 0 \\ \beta(0) & \beta\left(\frac{b}{\mu}\right) - (\mu + \omega) & (1-q)\delta & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & q\delta & -\mu \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &= \begin{pmatrix} -\mu & -\beta\left(\frac{b}{\mu}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \beta\left(\frac{b}{\mu}\right) - (\mu + \omega) & (1-q)\delta & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & q\delta & -\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Setelah didapatkan matriks Jacobian dari titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah, selanjutnya akan dicari nilai eigen matriks $D_f(E^0)$ dengan cara mencari $\det(D_f(E^0) - \lambda I) = 0$. Langkah pertama yang dilakukan yaitu menentukan nilai dari $(D_f(E^0) - \lambda I)$.

$$\begin{aligned}
D_f(E^0) - \lambda I &= \begin{pmatrix} -\mu & -\beta\left(\frac{b}{\mu}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \beta\left(\frac{b}{\mu}\right) - (\mu + \omega) & (1-q)\delta & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & q\delta & -\mu \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} -\mu & -\beta\left(\frac{b}{\mu}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \beta\left(\frac{b}{\mu}\right) - (\mu + \omega) & (1-q)\delta & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & q\delta & -\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} -\mu - \lambda & -\beta\left(\frac{b}{\mu}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \beta\left(\frac{b}{\mu}\right) - (\mu + \omega) - \lambda & (1-q)\delta & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & q\delta & -\mu - \lambda \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari $\det(D_f(E^0) - \lambda I) = 0$ menggunakan metode ekspansi kofaktor seperti pada definisi (2.4.13) dan metode sarrus (Hal 47). Metode ekspansi kofaktor digunakan untuk menghitung determinan matriks berukuran $n \times n$ dengan $n \geq 3$. Sedangkan untuk metode sarrus digunakan secara khusus untuk menghitung determinan dari matriks 3×3 .

$$\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} -\mu - \lambda & -\beta\left(\frac{b}{\mu}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \beta\left(\frac{b}{\mu}\right) - (\mu + \omega) - \lambda & (1-q)\delta & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & q\delta & -\mu - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff (-\mu - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} \beta\left(\frac{b}{\mu}\right) - (\mu + \omega) - \lambda & (1-q)\delta & 0 \\ \omega & -(\delta + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & q\delta & -\mu - \lambda \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -\beta\left(\frac{b}{\mu}\right) & 0 & 0 \\ \omega & -(\delta + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & q\delta & -\mu - \lambda \end{pmatrix} \\
&\quad + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -\beta\left(\frac{b}{\mu}\right) & 0 & 0 \\ \beta\left(\frac{b}{\mu}\right) - (\mu + \omega) - \lambda & (1-q)\delta & 0 \\ 0 & q\delta & -\mu - \lambda \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} \beta\left(\frac{b}{\mu}\right) - (\mu + \omega) - \lambda & (1-q)\delta & 0 \\ 0 & q\delta & -\mu - \lambda \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \det \begin{pmatrix} -\beta \left(\frac{b}{\mu} \right) & 0 & 0 \\ \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) - (\mu + \omega) - \lambda & (1-q)\delta & 0 \\ 0 & q\delta & -\mu - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\
\iff & (-\mu - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) - (\mu + \omega) - \lambda & (1-q)\delta & 0 \\ \omega & -(\delta + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & q\delta & -\mu - \lambda \end{pmatrix} - 0 + 0 - 0 = 0 \\
\iff & (-\mu - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) - (\mu + \omega) - \lambda & (1-q)\delta & 0 \\ \omega & -(\delta + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & q\delta & -\mu - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Misalkan $X = \begin{pmatrix} \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) - (\mu + \omega) - \lambda & (1-q)\delta & 0 \\ \omega & -(\delta + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & q\delta & -\mu - \lambda \end{pmatrix}$,

akan dicari deteminan dari matriks X dengan metode sarrus. Substitusi elemen matriks X ke dalam persamaan (2.47) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\det(X) &= \begin{vmatrix} \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) - (\mu + \omega) - \lambda & (1-q)\delta & 0 \\ \omega & -(\delta + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & q\delta & -\mu - \lambda \end{vmatrix} \\
\iff &= \left(\beta \left(\frac{b}{\mu} \right) - (\mu + \omega) - \lambda \right) \left(-(\delta + \mu) - \lambda \right) \left(-\mu - \lambda \right) + (1-q)\delta(0)(0) + \\
&\quad (0)(\omega)(q\delta) - (0) \left(-(\delta + \mu) - \lambda \right) (\omega) - \left(\beta \left(\frac{b}{\mu} \right) - (\mu + \omega) - \lambda \right) (0)(q\delta) - \\
&\quad (1-q)\delta(\omega)(-\mu - \lambda) \\
\iff &= \left(\beta \left(\frac{b}{\mu} \right) - (\mu + \omega) - \lambda \right) \left(-(\delta + \mu) - \lambda \right) \left(-\mu - \lambda \right) - (1-q)\delta\omega(-\mu - \lambda)
\end{aligned}$$

Setelah didapatkan determinan dari matriks X , selanjutnya hasil determinan dari matriks X akan disubstitusikan ke dalam persamaan (4.29).

$$\begin{aligned}
0 &= \det \left(D_f(E^0) - \lambda I \right) \\
\iff &= (-\mu - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) - (\mu + \omega) - \lambda & (1-q)\delta & 0 \\ \omega & -(\delta + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & q\delta & -\mu - \lambda \end{pmatrix} \\
\iff &= (-\mu - \lambda) \left[\left(\beta \left(\frac{b}{\mu} \right) - (\mu + \omega) - \lambda \right) \left(-(\delta + \mu) - \lambda \right) \left(-\mu - \lambda \right) - (1-q)\delta\omega(-\mu - \lambda) \right]
\end{aligned}$$

$$q)\delta\omega(-\mu-\lambda)\Bigg] \\ \Longleftrightarrow = (-\mu-\lambda)(-\mu-\lambda)\Bigg[\left(\beta\left(\frac{b}{\mu}\right)-(\mu+\omega)-\lambda\right)(-(\delta+\mu)-\lambda)-(1-q)\delta\omega\Bigg]$$

Sehingga diperoleh

$$0 = (-\mu-\lambda)(-\mu-\lambda)$$

atau

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\beta\left(\frac{b}{\mu}\right)-(\mu+\omega)-\lambda\right)(-(\delta+\mu)-\lambda)-(1-q)\delta\omega \\ \Longleftrightarrow 0 &= -\beta\left(\frac{b}{\mu}\right)(\delta+\mu)-\beta\left(\frac{b}{\mu}\right)\lambda+(\mu+\omega)(\delta+\mu)+(\mu+\omega)\lambda+\lambda(\delta+\mu)+\lambda^2-(1-q)\delta\omega \\ \Longleftrightarrow 0 &= \lambda^2+\lambda\left[(\mu+\omega)+(\delta+\mu)-\beta\left(\frac{b}{\mu}\right)\right]+(\mu+\omega)(\delta+\mu)-\beta\left(\frac{b}{\mu}\right)(\delta+\mu)-(1-q)\delta\omega \end{aligned}$$

Untuk

$$0 = (-\mu-\lambda)(-\mu-\lambda)$$

diperoleh nilai eigen

$$0 = (-\mu-\lambda) \text{ atau } 0 = (-\mu-\lambda)$$

$$\lambda_1 = -\mu \quad \text{atau} \quad \lambda_2 = -\mu$$

Diperoleh nilai eigen dari λ_1 dan λ_2 bernilai negatif. Selanjutnya akan dicari nilai eigen λ_3 dan λ_4 yang merupakan akar-akar persamaan karakteristik berikut:

$$\lambda^2 + \lambda\left[(\mu+\omega)+(\delta+\mu)-\beta\left(\frac{b}{\mu}\right)\right] + (\mu+\omega)(\delta+\mu)-\beta\left(\frac{b}{\mu}\right)(\delta+\mu)-(1-q)\delta\omega = 0 \quad (4.30)$$

Persamaan (4.30) disederhanakan menjadi

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (4.31)$$

dengan

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = (\mu + \omega) + (\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right),$$

$$a_2 = (\mu + \omega)(\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) (\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega.$$

Untuk menentukan kestabilan dari titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah, maka dapat digunakan kriteria *Hurwitz*. Kriteria ini menyatakan bahwa bagian real dari nilai eigen yang diperoleh dari persamaan karakteristik (4.31) akan bernilai negatif jika determinan dari matriks *Hurwitz* bernilai positif. Hal ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah bersifat stabil. Berdasarkan kriteria *Hurwitz*, bagian real dari nilai eigen λ_3 , dan λ_4 akan bernilai negatif jika $\det(H_1) = a_1 > 0$ dan $\det(H_2) = a_1 a_2 - a_3(1) > 0$.

Diketahui nilai R_0 sebagai berikut

$$R_0 = \frac{\beta b}{\mu(\mu + \omega)}$$

$$\iff R_0 \left(\mu(\mu + \omega) \right) = \beta b$$

1. Akan ditunjukkan $a_1 > 0$

$$a_1 = (\mu + \omega) + (\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right)$$

$$\iff \mu(\mu + \omega) + \mu(\delta + \mu) - \beta b$$

$$\iff \mu(\mu + \omega) - \beta b + \mu(\delta + \mu)$$

$$\iff \mu(\mu + \omega) - R_0 \left(\mu(\mu + \omega) \right) + \mu(\delta + \mu)$$

$$\iff (1 - R_0) \left(\mu(\mu + \omega) \right) + \mu(\delta + \mu)$$

Karena semua parameter bernilai positif, sehingga terbukti bahwa $a_1 > 0$ jika $R_0 < 1$.

2. Akan ditunjukkan $a_2 > 0$

$$\begin{aligned}
 a_2 &= (\mu + \omega)(\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) (\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \\
 &\iff (\mu + \omega)(\delta + \mu) - \frac{R_0 \left(\mu(\mu + \omega) \right)}{\mu} (\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \\
 &\iff = \frac{1}{\mu} \left[\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu) - R_0 \left(\mu(\mu + \omega) \right) (\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega\mu \right]
 \end{aligned}$$

Menurut kriteria *Hurwitz*, syarat kestabilan sistem ditentukan oleh $\det(H_1) = a_1 > 0$ dan $\det(H_2) = a_1 a_2 - a_3 > 0$ yang menjamin nilai eigen bernilai negatif. Oleh karena itu, diperlukan $a_2 > 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\mu} \left[\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu) - R_0 \left(\mu(\mu + \omega) \right) (\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega\mu \right] > 0 \\
 &\iff \mu \frac{1}{\mu} \left[\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu) - R_0 \left(\mu(\mu + \omega) \right) (\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega\mu \right] > \mu(0) \\
 &\iff \mu(\mu + \omega)(\delta + \mu) - R_0 \left(\mu(\mu + \omega) \right) (\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega\mu > 0 \\
 &\iff (1 - R_0) \left(\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu) \right) - (1 - q)\delta\omega\mu > 0 \\
 &\iff (1 - R_0) \left(\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu) \right) > (1 - q)\delta\omega\mu \\
 &\iff \frac{1}{(1 - q)\delta\omega\mu} (1 - R_0) \left(\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu) \right) > \frac{(1 - q)\delta\omega\mu}{(1 - q)\delta\omega\mu} \\
 &\iff \frac{1}{(1 - q)\delta\omega\mu} (1 - R_0) \left(\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu) \right) > 1
 \end{aligned}$$

Karena semua parameter μ, ω, δ, q bernilai positif dan $0 \leq q \leq 1$, maka ketidaksamaan di atas akan terpenuhi jika dan hanya jika $R_0 < 1$. Oleh karena itu, terbukti bahwa $a_2 > 0$ jika $R_0 < 1$.

3. Akan ditunjukkan $a_1 a_2 - a_3(1) > 0$. Diketahui bahwa $a_3 = 0$ sehingga yang akan dibuktikan yaitu $a_1 a_2 > 0$.

$$a_1 a_2 = \left[(\mu + \omega) + (\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) \right] \left[(\mu + \omega)(\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) (\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \right]$$

Berdasarkan kriteria *Hurwitz*, sistem dinyatakan stabil

jika memenuhi syarat $\det(H_1) = a_1 > 0$ dan $\det(H_2) = a_1 a_2 - a_3 > 0$ yang menjamin nilai eigen bernilai negatif. Dengan diketahui bahwa $a_3 = 0$ serta $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$, maka cukup dibuktikan bahwa $a_1 a_2 > 0$.

$$\begin{aligned}
 & \left[(\mu + \omega) + (\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) \right] \left[(\mu + \omega)(\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) (\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \right] > 0 \\
 \iff & (\mu + \omega) + (\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) > \frac{0}{(\mu + \omega)(\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) (\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega} \\
 \iff & (\mu + \omega) + (\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) > 0 \\
 \iff & \mu(\mu + \omega) + \mu(\delta + \mu) - \beta b > 0 \\
 \iff & \mu(\mu + \omega) - \beta b + \mu(\delta + \mu) > 0 \\
 \iff & \mu(\mu + \omega) - R_0 \left(\mu(\mu + \omega) \right) + \mu(\delta + \mu) > 0 \\
 \iff & (1 - R_0) \left(\mu(\mu + \omega) \right) + \mu(\delta + \mu) > 0
 \end{aligned}$$

Seluruh parameter bernilai positif dan $R_0 < 1$, sehingga pertidaksamaan tersebut terpenuhi. Dengan demikian, terbukti bahwa $a_1 a_2 > 0$ jika $R_0 < 1$.

Karena telah dibuktikan bahwa $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, dan $a_1 a_2 > 0$ apabila $R_0 < 1$, maka berdasarkan kriteria *Hurwitz* dapat disimpulkan bahwa semua bagian real dari nilai eigen yaitu λ_3 dan λ_4 yang diperoleh dari persamaan (4.30) bernilai negatif. Dengan demikian, bagian real dari nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 bernilai negatif sehingga dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$. Berdasarkan pembuktian di atas, diperoleh teorema yang berbunyi sebagai berikut:

Teorema 4.5.1

Titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah (E^0) dikatakan stabil jika $R_0 < 1$.

2. Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Endemik Anak Putus Sekolah

Titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah yaitu $E_1 = (S^*, I^*, G^*, R^*)$ dimana $S^* = \frac{\delta\omega q + \delta\mu + \mu^2 + \omega\mu}{\beta(\delta + \mu)}$, $I^* = \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu}$, $G^* = \frac{\omega}{\delta + \mu} \cdot \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu}$, dan $R^* = \frac{q\delta\omega}{\mu(\delta + \mu)} \cdot \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu}$ akan disubstitusikan ke dalam matriks Jacobian (4.27) sehingga diperoleh

$$D_f(E_1) = \begin{pmatrix} -\left(\beta \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu} + \mu\right) & -\beta \frac{(\delta\omega q + \delta\mu + \mu^2 + \omega\mu)}{\beta(\delta + \mu)} & 0 & 0 \\ \beta \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu} & \beta \frac{(\delta\omega q + \delta\mu + \mu^2 + \omega\mu)}{\beta(\delta + \mu)} - (\mu + \omega) & (1 - q)\delta & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & q\delta & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\iff = \begin{pmatrix} -\frac{\beta b(\delta + \mu)}{\delta\omega q + \delta\mu + \mu^2 + \omega\mu} & -\frac{(\delta\omega q + \delta\mu + \mu^2 + \omega\mu)}{(\delta + \mu)} & 0 & 0 \\ \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\delta\omega q + \delta\mu + \mu^2 + \omega\mu} & \frac{(\delta\omega q + \delta\mu + \mu^2 + \omega\mu)}{(\delta + \mu)} - (\mu + \omega) & (1 - q)\delta & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & q\delta & -\mu \end{pmatrix}$$

Untuk mempermudah penulisan, maka akan dimisalkan jika $A = \delta\omega q + \delta\mu + \mu^2 + \omega\mu$ sehingga diperoleh

$$D_f(E_1) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} & -\frac{A}{(\delta + \mu)} & 0 & 0 \\ \frac{\beta b(\delta + \mu) - A\mu}{A} & \frac{A}{(\delta + \mu)} - (\mu + \omega) & (1 - q)\delta & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & q\delta & -\mu \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Setelah didapatkan matriks Jacobian dari titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah, selanjutnya akan dicari nilai eigen matriks $D_f(E_1)$ dengan cara mencari $\det(D_f(E_1) - \lambda I) = 0$. Langkah pertama yang dilakukan yaitu menentukan nilai $(D_f(E_1) - \lambda I)$.

$$D_f(E_1) - \lambda I = \begin{pmatrix} -\frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} & -\frac{A}{(\delta + \mu)} & 0 & 0 \\ \frac{\beta b(\delta + \mu) - A\mu}{A} & \frac{A}{(\delta + \mu)} - (\mu + \omega) & (1 - q)\delta & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & q\delta & -\mu \end{pmatrix} -$$

$$\begin{aligned}
& \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow &= \begin{pmatrix} -\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} & -\frac{A}{(\delta+\mu)} & 0 & 0 \\ \frac{\beta b(\delta+\mu)-A\mu}{A} & \frac{A}{(\delta+\mu)} - (\mu+\omega) & (1-q)\delta & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & q\delta & -\mu \end{pmatrix} - \\
& \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow &= \begin{pmatrix} -\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} - \lambda & -\frac{A}{(\delta+\mu)} & 0 & 0 \\ \frac{\beta b(\delta+\mu)-A\mu}{A} & \frac{A}{(\delta+\mu)} - (\mu+\omega) - \lambda & (1-q)\delta & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta+\mu) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & q\delta & -\mu - \lambda \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari $\det(D_f(E_1) - \lambda I) = 0$ menggunakan metode ekspansi kofaktor seperti pada definisi (2.4.13) dan metode sarrus (Hal 47) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= \det \begin{pmatrix} -\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} - \lambda & -\frac{A}{(\delta+\mu)} & 0 & 0 \\ \frac{\beta b(\delta+\mu)-A\mu}{A} & \frac{A}{(\delta+\mu)} - (\mu+\omega) - \lambda & (1-q)\delta & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta+\mu) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & q\delta & -\mu - \lambda \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow &= -0 \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\beta b(\delta+\mu)-A\mu}{A} & \frac{A}{(\delta+\mu)} - (\mu+\omega) - \lambda & (1-q)\delta \\ 0 & \omega & -(\delta+\mu) - \lambda \\ 0 & 0 & q\delta \end{pmatrix} + \\
& 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} - \lambda & -\frac{A}{(\delta+\mu)} & 0 \\ 0 & \omega & -(\delta+\mu) - \lambda \\ 0 & 0 & q\delta \end{pmatrix} - \\
& 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} - \lambda & -\frac{A}{(\delta+\mu)} & 0 \\ \frac{\beta b(\delta+\mu)-A\mu}{A} & \frac{A}{(\delta+\mu)} - (\mu+\omega) - \lambda & (1-q)\delta \\ 0 & 0 & q\delta \end{pmatrix} + \\
& (-\mu - \lambda) \det \begin{pmatrix} -\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} - \lambda & -\frac{A}{(\delta+\mu)} & 0 \\ \frac{\beta b(\delta+\mu)-A\mu}{A} & \frac{A}{(\delta+\mu)} - (\mu+\omega) - \lambda & (1-q)\delta \\ 0 & \omega & -(\delta+\mu) - \lambda \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow &= -0 + 0 - 0 + \begin{pmatrix} - & \mu & - & \lambda \end{pmatrix} \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} -\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} - \lambda & -\frac{A}{(\delta+\mu)} & 0 \\ \frac{\beta b(\delta+\mu)-A\mu}{A} & \frac{A}{(\delta+\mu)} - (\mu+\omega) - \lambda & (1-q)\delta \\ 0 & \omega & -(\delta+\mu) - \lambda \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &= (-\mu-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} - \lambda & -\frac{A}{(\delta+\mu)} & 0 \\ \frac{\beta b(\delta+\mu)-A\mu}{A} & \frac{A}{(\delta+\mu)} - (\mu+\omega) - \lambda & (1-q)\delta \\ 0 & \omega & -(\delta+\mu) - \lambda \end{pmatrix} \\ \text{Misalkan } Y &= \begin{pmatrix} -\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} - \lambda & -\frac{A}{(\delta+\mu)} & 0 \\ \frac{\beta b(\delta+\mu)-A\mu}{A} & \frac{A}{(\delta+\mu)} - (\mu+\omega) - \lambda & (1-q)\delta \\ 0 & \omega & -(\delta+\mu) - \lambda \end{pmatrix}, \text{ akan} \end{aligned}$$

dicari deteminan dari matriks Y dengan metode sarrus. Substitusi elemen matriks Y ke dalam persamaan (2.47) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \det(Y) &= \begin{vmatrix} -\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} - \lambda & -\frac{A}{(\delta+\mu)} & 0 \\ \frac{\beta b(\delta+\mu)-A\mu}{A} & \frac{A}{(\delta+\mu)} - (\mu+\omega) - \lambda & (1-q)\delta \\ 0 & \omega & -(\delta+\mu) - \lambda \end{vmatrix} \\ \Leftrightarrow &= \left(-\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} - \lambda\right) \left(\frac{A}{(\delta+\mu)} - (\mu+\omega) - \lambda\right) \left(-(\delta+\mu) - \lambda\right) + \\ &\quad \left(-\frac{A}{(\delta+\mu)}\right) \left((1-q)\delta\right) (0) + (0) \left(\frac{\beta b(\delta+\mu)-A\mu}{A}\right) (\omega) - \\ &\quad (0) \left(\frac{A}{(\delta+\mu)} - (\mu+\omega) - \lambda\right) (0) - \left(-\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} - \lambda\right) \left((1-q)\delta\right) (\omega) - \\ &\quad \left(-\frac{A}{(\delta+\mu)}\right) \left(\frac{\beta b(\delta+\mu)-A\mu}{A}\right) \left(-(\delta+\mu) - \lambda\right) \\ \Leftrightarrow &= \left(-\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} - \lambda\right) \left(\frac{A}{(\delta+\mu)} - (\mu+\omega) - \lambda\right) \left(-(\delta+\mu) - \lambda\right) - \\ &\quad \left(-\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} - \lambda\right) \left((1-q)\delta\right) (\omega) - \left(-\frac{A}{(\delta+\mu)}\right) \left(\frac{\beta b(\delta+\mu)-A\mu}{A}\right) \left(-(\delta+\mu) - \lambda\right) \\ \Leftrightarrow &= \left[\left(-\beta b\right) + \left(\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A}\right) (\mu+\omega) + \left(\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A}\right) \lambda - \left(\frac{A}{(\delta+\mu)}\right) \lambda + \right. \\ &\quad \left. (\mu+\omega) \lambda + \lambda^2 \right] \left(-(\delta+\mu) - \lambda\right) - \left[\left(-\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A}\right) (1-q)\delta \omega - \right. \\ &\quad \left. (1-q)\delta \omega \lambda \right] - \left[\left(\beta b(\delta+\mu) - A\mu\right) + \left(\frac{\beta b(\delta+\mu)-A\mu}{\delta+\mu}\right) \lambda \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow &= \left(\beta b(\delta + \mu) \right) - \left(\frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A} \right) \left(\mu + \omega \right) - \left(\frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A} \right) \lambda + \\
&A\lambda - \left(\mu + \omega \right) \left(\delta + \mu \right) \lambda - \left(\delta + \mu \right) \lambda^2 + \left(\beta b \right) \lambda - \\
&\left(\frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} \right) \left(\mu + \omega \right) \lambda - \left(\frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} \right) \lambda^2 + \left(\frac{A}{(\delta + \mu)} \right) \lambda^2 - \\
&\left(\mu + \omega \right) \lambda^2 - \lambda^3 + \left(\frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} \right) \left(1 - q \right) \delta \omega + \left((1 - q) \delta \omega \right) \lambda - \left(\beta b(\delta + \mu) - A\mu \right) - \left(\frac{\beta b(\delta + \mu) - A\mu}{\delta + \mu} \lambda \right) \\
\Longleftrightarrow &= -\lambda^3 + \left[\frac{A}{\delta + \mu} - \left(\mu + \omega \right) - \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} - \left(\delta + \mu \right) \right] \lambda^2 + \left[A + \right. \\
&\beta b + \left(1 - q \right) \delta \omega - \frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A} - \left(\mu + \omega \right) \left(\delta + \mu \right) - \\
&\left. \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} \left(\mu + \omega \right) - \frac{\beta b(\delta + \mu) - A\mu}{\delta + \mu} \right] \lambda + \left[\left(\beta b(\delta + \mu) \right) - \right. \\
&\left(\frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A} \right) \left(\mu + \omega \right) + \left(\frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} \right) \left(1 - q \right) \delta \omega - \\
&\left. \left(\beta b(\delta + \mu) - A\mu \right) \right] \\
\Longleftrightarrow &= \lambda^3 + \left[-\frac{A}{\delta + \mu} + \left(\mu + \omega \right) + \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} + \left(\delta + \mu \right) \right] \lambda^2 + \left[- \right. \\
&A - \beta b - \left(1 - q \right) \delta \omega + \frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A} + \left(\mu + \omega \right) \left(\delta + \mu \right) + \\
&\left. \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} \left(\mu + \omega \right) + \frac{\beta b(\delta + \mu) - A\mu}{\delta + \mu} \right] \lambda + \left[\left(-\beta b(\delta + \mu) \right) + \right. \\
&\left(\frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A} \right) \left(\mu + \omega \right) - \left(\frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} \right) \left(1 - q \right) \delta \omega + \beta b \left(\delta + \right. \\
&\left. \mu \right) - A\mu \left. \right] \\
\Longleftrightarrow &= \lambda^3 + \left[-\frac{A}{\delta + \mu} + \left(\mu + \omega \right) + \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} + \left(\delta + \mu \right) \right] \lambda^2 + \left[- \right. \\
&A - \beta b - \left(1 - q \right) \delta \omega + \frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A} + \left(\mu + \omega \right) \left(\delta + \mu \right) +
\end{aligned}$$

$$\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} \left(\mu + \omega \right) + \frac{\beta b(\delta+\mu) - A\mu}{\delta+\mu} \Big] \lambda + \left[\frac{\beta b(\delta+\mu)^2(\mu+\omega)}{A} - \frac{\beta b(\delta+\mu)(1-q)\delta\omega}{A} - A\mu \right]$$

Setelah didapatkan determinan dari matriks Y , selanjutnya hasil determinan dari matriks Y akan disubstitusikan ke dalam $\det(D_f(E_1) - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \det(D_f(E_1) - \lambda I) \\ \iff 0 &= (-\mu - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} - \lambda & -\frac{A}{(\delta+\mu)} & 0 \\ \frac{\beta b(\delta+\mu) - A\mu}{A} & \frac{A}{(\delta+\mu)} - (\mu + \omega) - \lambda & (1-q)\delta \\ 0 & \omega & -(\delta + \mu) - \lambda \end{pmatrix} \\ \iff 0 &= (-\mu - \lambda) \left(\lambda^3 + \left[-\frac{A}{\delta+\mu} + (\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} + (\delta + \mu) \right] \lambda^2 + \left[-A - \beta b - (1-q)\delta\omega + \frac{\beta b(\delta+\mu)^2}{A} + (\mu + \omega)(\delta\mu) + \frac{\beta b(\delta+\mu)}{A}(\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta+\mu) - A\mu}{\delta+\mu} \right] \lambda + \left[\frac{\beta b(\delta+\mu)^2(\mu+\omega)}{A} - \frac{\beta b(\delta+\mu)(1-q)\delta\omega}{A} - A\mu \right] \right) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$(-\mu - \lambda) = 0$$

atau

$$\begin{aligned} \lambda^3 + \left[-\frac{A}{\delta+\mu} + (\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} + (\delta + \mu) \right] \lambda^2 + \left[-A - \beta b - (1-q)\delta\omega + \frac{\beta b(\delta+\mu)^2}{A} + (\mu + \omega)(\delta + \mu) + \frac{\beta b(\delta+\mu)}{A}(\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta+\mu) - A\mu}{\delta+\mu} \right] \lambda + \left[\frac{\beta b(\delta+\mu)^2(\mu+\omega)}{A} - \frac{\beta b(\delta+\mu)(1-q)\delta\omega}{A} - A\mu \right] &= 0 \end{aligned}$$

Untuk

$$(-\mu - \lambda) = 0$$

diperoleh bahwa

$$(-\mu - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -\mu.$$

Diketahui bahwa λ_1 bernilai negatif. Selanjutnya akan dicari nilai eigen λ_2 , λ_3 , dan λ_4 yang merupakan akar-akar persamaan karakteristik berikut ini:

$$\begin{aligned}
& \lambda^3 + \left[-\frac{A}{\delta+\mu} + (\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} + (\delta + \mu) \right] \lambda^2 + \left[-A - \beta b - (1 - q)\delta\omega + \frac{\beta b(\delta+\mu)^2}{A} + (\mu + \omega)(\delta + \mu) + \frac{\beta b(\delta+\mu)}{A}(\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta+\mu) - A\mu}{\delta+\mu} \right] \lambda \\
& + \left[\frac{\beta b(\delta + \mu)^2(\mu + \omega)}{A} - \frac{\beta b(\delta + \mu)(1 - q)\delta\omega}{A} - A\mu \right] = 0 \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode *Hurwitz* seperti pada definisi (2.52). Persamaan (4.33) disederhanakan menjadi

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (4.34)$$

dengan

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= -\frac{A}{\delta + \mu} + (\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} + (\delta + \mu), \\
a_2 &= -A - \beta b - (1 - q)\delta\omega + \frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A} + (\mu + \omega)(\delta + \mu) \\
&\quad + \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A}(\mu + \omega) + \beta b - \frac{A\mu}{\delta + \mu}, \\
a_3 &= \frac{\beta b(\delta + \mu)^2(\mu + \omega)}{A} - \frac{\beta b(\delta + \mu)(1 - q)\delta\omega}{A} - A\mu.
\end{aligned}$$

Untuk menentukan kestabilan dari titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah, maka dapat digunakan krtiteria *Hurwitz*. Kriteria ini menyatakan bahwa bagian real dari nilai eigen yang dipeoleh dari persamaan karakteristik (4.34) akan bernilai negatif jika determinan dari matriks *Hurwitz* bernilai positif. Hal ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah bersifat stabil. Berdasarkan kriteria *Hurwitz*, bagian real dari nilai eigen λ_2 , λ_3 , dan λ_4 akan bernilai negatif jika $\det(H_1) = a_1$,

$\det(H_2) = a_1 a_2 - a_3(1)$, dan $\det(H_3) = a_1 a_2 a_3 - a_3 a_3(1)$ bernilai positif.

Diketahui nilai R_0 sebagai berikut

$$R_0 = \frac{\beta b}{\mu(\mu + \omega)}$$

$$\iff R_0 (\mu(\mu + \omega)) = \beta b$$

1. Akan ditunjukkan $a_1 > 0$

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{A}{\delta + \mu} + (\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} + (\delta + \mu) \\ \iff &= \frac{-A^2 + A(\mu + \omega)(\delta + \mu) + \beta b(\delta + \mu)^2 + A(\delta + \mu)^2}{A(\delta + \mu)} \\ \iff &= -A^2 + A(\mu + \omega)(\delta + \mu) + \beta b(\delta + \mu)^2 + A(\delta + \mu)^2 \\ \iff &= A(-A + (\mu + \omega)(\delta + \mu)) + \beta b(\delta + \mu)^2 + A(\delta + \mu)^2 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Diketahui sebelumnya bahwa

$$A = \delta\omega q + \delta\mu + \mu^2 + \omega\mu \quad (4.36)$$

$$\iff = (\mu + \omega)(\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \quad (4.37)$$

Substitusikan (4.37) ke dalam (4.35) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} a_1 &= A(-A + (\mu + \omega)(\delta + \mu)) + \beta b(\delta + \mu)^2 + A(\delta + \mu)^2 \\ \iff &= A[-(\mu + \omega)(\delta + \mu) + (1 - q)\delta\omega + (\mu + \omega)(\delta + \mu)] + \beta b(\delta + \mu)^2 + A(\delta + \mu)^2 \\ \iff &= A(1 - q)\delta\omega + \beta b(\delta + \mu)^2 + A(\delta + \mu)^2 \end{aligned}$$

Karena semua parameter $A, \delta, \omega, q, \beta, b, \mu$ bernilai positif dan $0 \leq q \leq 1$ sehingga terbukti bahwa $a_1 > 0$.

2. Akan ditunjukkan $a_1 a_2 - a_3(1) > 0$

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3(1) &= \left[-\frac{A}{\delta + \mu} + (\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} + (\delta + \mu) \right] \left[-A - \beta b - (1 - q)\delta\omega + \frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A} + (\mu + \omega)(\delta + \mu) + \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A}(\mu + \omega) + \beta b - \frac{A\mu}{\delta + \mu} \right] \\ &\quad - \left[\frac{\beta b(\delta + \mu)^2(\mu + \omega)}{A} - \frac{\beta b(\delta + \mu)(1 - q)\delta\omega}{A} - A\mu \right] \\ \iff &= \frac{A^2}{\delta + \mu} + \frac{A\beta b}{\delta + \mu} + \frac{A}{\delta + \mu}(1 - q)\delta\omega - \beta b(\delta + \mu) - A(\mu + \omega) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta b(\mu + \omega) - \frac{A\beta b}{\delta + \mu} + \frac{A^2\mu}{(\delta + \mu)^2} - A(\mu + \omega) - \beta b(\mu + \omega) - \\
& (\mu + \omega)(1 - q)\delta\omega + \frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A}(\mu + \omega) + (\mu + \omega)^2(\delta + \mu) + \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A}(\mu + \omega)^2 + \beta b(\mu + \omega) - \frac{A\mu}{\delta + \mu}(\mu + \omega) - \\
& \beta b(\delta + \mu) - \frac{(\beta b)^2(\delta + \mu)}{A} - \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A}(1 - q)\delta\omega + \frac{(\beta b)^2(\delta + \mu)^3}{A^2} + \\
& \frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A}(\mu + \omega) + \frac{(\beta b)^2(\delta + \mu)^2}{A^2}(\mu + \omega) + \frac{(\beta b)^2(\delta + \mu)}{A} - \\
& \beta b\mu - A(\delta + \mu) - \beta b(\delta + \mu) - (\delta + \mu)(1 - q)\delta\omega + \frac{\beta b(\delta + \mu)^3}{A} + \\
& (\mu + \omega)(\delta + \mu)^2 + \frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A}(\mu + \omega) + \beta b(\delta + \mu) - A\mu - \\
& \frac{\beta b(\delta + \mu)^2(\mu + \omega)}{A} + \frac{\beta b(\delta + \mu)(1 - q)\delta\omega}{A} + A\mu \\
\iff & = \frac{A^2}{\delta + \mu} + \frac{A}{\delta + \mu}(1 - q)\delta\omega - 2\beta b(\delta + \mu) - 2A(\mu + \omega) + \frac{A^2\mu}{(\delta + \mu)^2} - \\
& \beta b(\mu + \omega) - (\mu + \omega)(1 - q)\delta\omega + 2\frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A}(\mu + \omega) + \\
& (\mu + \omega)^2(\delta + \mu) + \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A}(\mu + \omega)^2 - \frac{A\mu}{\delta + \mu}(\mu + \omega) + \\
& \frac{(\beta b)^2(\delta + \mu)^3}{A^2} + \frac{(\beta b)^2(\delta + \mu)^2}{A^2}(\mu + \omega) - \beta b\mu - A(\delta + \mu) - (\delta + \mu)(1 - q)\delta\omega + \\
& \frac{\beta b(\delta + \mu)^3}{A} + (\mu + \omega)(\delta + \mu)^2 \\
\iff & = \frac{1}{A^2(\delta + \mu)^2} \left[A^4(\delta + \mu) + A^3(\delta + \mu)(1 - q)\delta\omega - \right. \\
& 2A^2\beta b(\delta + \mu)^3 - 2A^3(\mu + \omega)(\delta + \mu)^2 + A^4\mu - \\
& A^2\beta b(\mu + \omega)(\delta + \mu)^2 - A^2(\mu + \omega)(\delta + \mu)^2(1 - q)\delta\omega + \\
& 2A\beta b(\mu + \omega)(\delta + \mu)^4 + A^2(\mu + \omega)^2(\delta + \mu)^3 + A\beta b(\mu + \omega)^2(\delta + \mu)^3 - \\
& A^3\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu) + (\beta b)^2(\delta + \mu)^5 + (\beta b)^2(\mu + \omega)(\delta + \mu)^4 - \\
& A^2\beta b\mu(\delta + \mu)^2 - A^3(\delta + \mu)^3 - A^2(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega + \\
& A\beta b(\delta + \mu)^5 + A^2(\mu + \omega)(\delta + \mu)^4 \left. \right]
\end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria *Hurwitz*, sistem dinyatakan stabil jika memenuhi syarat $\det(H_1) = a_1 > 0$, $\det(H_2) = a_1a_2 - a_3(1) > 0$, dan $\det(H_3) = a_1a_2a_3 - a_3a_3(1) > 0$ yang menjamin nilai eigen bernilai negatif. Oleh karena itu, diperlukan $a_1a_2 - a_3(1) > 0$ sehingga

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A^2(\delta + \mu)^2} \left[A^4(\delta + \mu) + A^3(\delta + \mu)(1 - q)\delta\omega - 2A^2\beta b(\delta + \mu)^3 - \right. \\
& 2A^3(\mu + \omega)(\delta + \mu)^2 + A^4\mu - A^2\beta b(\mu + \omega)(\delta + \mu)^2 - \\
& A^2(\mu + \omega)(\delta + \mu)^2(1 - q)\delta\omega + 2A\beta b(\mu + \omega)(\delta + \mu)^4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A^2 (\mu + \omega)^2 (\delta + \mu)^3 + A\beta b(\mu + \omega)^2(\delta + \mu)^3 - A^3 \mu (\mu + \omega) (\delta + \mu) + \\
& (\beta b)^2 (\delta + \mu)^5 + (\beta b)^2 (\mu + \omega)(\delta + \mu)^4 - A^2 \beta b \mu (\delta + \mu)^2 - A^3 (\delta + \mu)^3 - \\
& A^2 (\delta + \mu)^3 (1 - q)\delta\omega + A\beta b(\delta + \mu)^5 + A^2 (\mu + \omega)(\delta + \mu)^4 \Big] > 0 \\
\Longleftrightarrow & A^4 (\delta + \mu) + A^3 (\delta + \mu)(1 - q)\delta\omega - 2A^2 \beta b (\delta + \mu)^3 - 2A^3 (\mu + \omega) (\delta + \mu)^2 + \\
& A^4 \mu - A^2 \beta b (\mu + \omega)(\delta + \mu)^2 - A^2 (\mu + \omega) (\delta + \mu)^2 (1 - q)\delta\omega + \\
& 2A\beta b (\mu + \omega) (\delta + \mu)^4 + A^2 (\mu + \omega)^2 (\delta + \mu)^3 + A\beta b (\mu + \omega)^2 (\delta + \mu)^3 - \\
& A^3 \mu (\mu + \omega) (\delta + \mu) + (\beta b)^2 (\delta + \mu)^5 + (\beta b)^2 (\mu + \omega) (\delta + \mu)^4 - \\
& A^2 \beta b \mu (\delta + \mu)^2 - A^3 (\delta + \mu)^3 - A^2 (\delta + \mu)^3 (1 - q)\delta\omega + A\beta b (\delta + \mu)^5 + \\
& A^2 (\mu + \omega) (\delta + \mu)^4 > 0 \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Lalu substitusikan nilai A pada (4.37) ke dalam persamaan (4.38). Sebelum mensubstitusikan nilai A ke dalam persamaan, sebaiknya dihitung terlebih dahulu nilai dari A^2 , A^3 , dan, A^4 .

$$A = (\mu + \omega)(\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega$$

$$A^2 = (\mu + \omega)^2(\delta + \mu)^2 - 2(\mu + \omega)(\delta + \mu)(1 - q)\delta\omega + (1 - q)^2(\delta\omega)^2$$

$$\begin{aligned}
A^3 &= (\mu + \omega)^3(\delta + \mu)^3 - 3(\mu + \omega)^2(\delta + \mu)^2(1 - q)\delta\omega + 3(\mu + \omega)(\delta + \mu) \\
&\quad (1 - q)^2(\delta\omega)^2 - (1 - q)^3(\delta\omega)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^4 &= (\mu + \omega)^4(\delta + \mu)^4 - 4(\mu + \omega)^3(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega + 6(\mu + \omega)^2(\delta + \mu)^2 \\
&\quad (1 - q)^2(\delta\omega)^2 - 4(\mu + \omega)(\delta + \mu)(1 - q)^3(\delta\omega)^3 + (1 - q)^4(\delta\omega)^4
\end{aligned}$$

Setelah diperoleh nilai A^2 , A^3 , dan, A^4 , selanjutnya nilai tersebut akan disubstitusikan ke dalam (4.38) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& \left[(\mu + \omega)^4(\delta + \mu)^5 - 4(\mu + \omega)^3(\delta + \mu)^4(1 - q)\delta\omega + 6(\mu + \omega)^2(\delta + \mu)^3 \right. \\
& \quad \left. (1 - q)^2(\delta\omega)^2 - 4(\mu + \omega)(\delta + \mu)^2(1 - q)^3(\delta\omega)^3 + (\delta + \mu)(1 - q)^4(\delta\omega)^4 \right] + \\
& \left[(\mu + \omega)^3(\delta + \mu)^4(1 - q)\delta\omega - 3(\mu + \omega)^2(\delta + \mu)^3(1 - q)^2(\delta\omega)^2 + 3(\mu + \omega)(\delta + \right. \\
& \quad \left. \mu)^2(1 - q)^3(\delta\omega)^3 - (\delta + \mu)(1 - q)^4(\delta\omega)^4 \right] + \left[-2\beta b(\mu + \omega)^2(\delta + \mu)^5 + 4\beta b(\mu + \right. \\
& \quad \left. \omega)(\delta + \mu)^4(1 - q)\delta\omega - 2\beta b(\delta + \mu)^3(1 - q)^2(\delta\omega)^2 \right] + \left[-2(\mu + \omega)^4(\delta + \mu)^5 + \right. \\
& \quad \left. 6(\mu + \omega)^3(\delta + \mu)^4(1 - q)\delta\omega - 6(\mu + \omega)^2(\delta + \mu)^3(1 - q)^2(\delta\omega)^2 + 2(\mu + \omega)(\delta + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu)^2(1-q)^3(\delta\omega)^3 \Big] + \Big[\mu(\mu+\omega)^4(\delta+\mu)^4 - 4\mu(\mu+\omega)^3(\delta+\mu)^3(1-q)\delta\omega + \\
& 6\mu(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^2(1-q)^2(\delta\omega)^2 - 4\mu(\mu+\omega)(\delta+\mu)(1-q)^3(\delta\omega)^3 + \mu(1-q)^4(\delta\omega)^4 \Big] + \\
& \Big[-\beta b(\mu+\omega)^3(\delta+\mu)^4 + 2\beta b(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^3(1-q)\delta\omega - \\
& \beta b(\mu+\omega)(\delta+\mu)^2(1-q)^2(\delta\omega)^2 \Big] + \Big[-(\mu+\omega)^3(\delta+\mu)^4(1-q)\delta\omega + 2(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^3(1-q)^2(\delta\omega)^2 - \\
& (\mu+\omega)(\delta+\mu)^2(1-q)^3(\delta\omega)^3 \Big] + \Big[2\beta b(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^5 - 2\beta b(\mu+\omega)(\delta+\mu)^4(1-q)\delta\omega \Big] + \\
& \Big[(\mu+\omega)^4(\delta+\mu)^5 - 2(\mu+\omega)^3(\delta+\mu)^4(1-q)\delta\omega + (\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^3(1-q)^2(\delta\omega)^2 \Big] + \\
& \Big[\beta b(\mu+\omega)^3(\delta+\mu)^4 - \beta b(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^3(1-q)\delta\omega \Big] + \Big[-\mu(\mu+\omega)^4(\delta+\mu)^4 + 3\mu(\mu+\omega)^3(\delta+\mu)^3(1-q)\delta\omega - \\
& 3\mu(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^2(1-q)^2(\delta\omega)^2 + \mu(\mu+\omega)(\delta+\mu)(1-q)^3(\delta\omega)^3 \Big] + \Big[(\beta b)^2(\delta+\mu)^5 \Big] + \Big[(\beta b)^2(\mu+\omega)(\delta+\mu)^4 \Big] + \Big[-\beta b\mu(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^4 + \\
& 2\beta b\mu(\mu+\omega)(\delta+\mu)^3(1-q)\delta\omega - \beta b\mu(\delta+\mu)^2(1-q)^2(\delta\omega)^2 \Big] + \\
& \Big[-(\mu+\omega)^3(\delta+\mu)^6 + 3(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^5(1-q)\delta\omega - 3(\mu+\omega)(\delta+\mu)^4(1-q)^2(\delta\omega)^2 + (\delta+\mu)^3(1-q)^3(\delta\omega)^3 \Big] + \\
& \Big[-(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^5(1-q)\delta\omega + 2(\mu+\omega)(\delta+\mu)^4(1-q)^2(\delta\omega)^2 - (\delta+\mu)^3(1-q)^3(\delta\omega)^3 \Big] + \Big[\beta b(\mu+\omega)(\delta+\mu)^6 - \\
& \beta b(\delta+\mu)^5(1-q)\delta\omega \Big] + \Big[(\mu+\omega)^3(\delta+\mu)^6 - 2(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^5(1-q)\delta\omega + (\mu+\omega)(\delta+\mu)^4(1-q)^2(\delta\omega)^2 \Big] > 0 \\
\iff & (\beta b)^2(\mu+\omega)(\delta+\mu)^4 - \beta b\mu(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^4 + 2\beta b(\mu+\omega)(\delta+\mu)^4(1-q)\delta\omega - 2\beta b(\delta+\mu)^3(1-q)^2(\delta\omega)^2 - \\
& \mu(\mu+\omega)^3(\delta+\mu)^3(1-q)\delta\omega + 3\mu(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^2(1-q)^2(\delta\omega)^2 - 3\mu(\mu+\omega)(\delta+\mu)(1-q)^3(\delta\omega)^3 + \mu(1-q)^4(\delta\omega)^4 + \\
& \beta b(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^3(1-q)\delta\omega - \beta b(\mu+\omega)(\delta+\mu)^2(1-q)^2(\delta\omega)^2 + (\beta b)^2(\delta+\mu)^5 + 2\beta b\mu(\mu+\omega)(\delta+\mu)^3(1-q)\delta\omega - \\
& \beta b\mu(\delta+\mu)^2(1-q)^2(\delta\omega)^2 + 3(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^5(1-q)\delta\omega - 2(\mu+\omega)(\delta+\mu)^4(1-q)^2(\delta+\mu)^2 - 3(\mu+\omega)^2(\delta+\mu)^5(1-q)\delta\omega + \\
& 2(\mu+\omega)(\delta+\mu)^4(1-q)^2(\delta+\mu)^2 + \beta b(\mu+\omega)(\delta+\mu)^6 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta b(\delta + \mu)^5(1 - q)\delta\omega > 0 \\
\Longleftrightarrow & \beta b(\mu + \omega)(\delta + \mu)^4 \left[\beta b - \mu(\mu + \omega) \right] + 2\beta b(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega \left[(\mu + \omega)(\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \right] \\
& + 3\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu)(1 - q)^2(\delta\omega)^2 \left[(\mu + \omega)(\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \right] + \\
& \beta b(\mu + \omega)(\delta + \mu)^2(1 - q)\delta\omega \left[(\mu + \omega)(\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \right] + \beta b\mu(\delta + \mu)^2(1 - q)\delta\omega \\
& \left[(\mu + \omega)(\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \right] + \beta b(\delta + \mu)^5 \left[(\mu + \omega)(\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \right] \\
& + \mu(1 - q)^4(\delta\omega)^4 + (\beta b)^2(\delta + \mu)^5 + \beta b\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega - \\
& \mu(\mu + \omega)^3(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega > 0 \\
\Longleftrightarrow & \beta b(\mu + \omega)(\delta + \mu)^4 \left[R_0(\mu(\mu + \omega)) - \mu(\mu + \omega) \right] + 2\beta b(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega \left[(\mu + \omega)(\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \right] \\
& + 3\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu)(1 - q)^2(\delta\omega)^2 \left[(\mu + \omega)(\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \right] + \beta b(\mu + \omega)(\delta + \mu)^2(1 - q)\delta\omega \\
& \left[(\mu + \omega)(\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \right] + \beta b\mu(\delta + \mu)^2(1 - q)\delta\omega \left[(\mu + \omega)(\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \right] + \beta b(\delta + \mu)^5 \\
& \left[(\mu + \omega)(\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \right] + \mu(1 - q)^4(\delta\omega)^4 + (\beta b)^2(\delta + \mu)^5 + \beta b\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega - \\
& \mu(\mu + \omega)^3(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega > 0 \\
\Longleftrightarrow & \beta b(\mu + \omega)(\delta + \mu)^4(\mu(\mu + \omega))(R_0 - 1) + 2\beta b(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega(A) + \\
& 3\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu)(1 - q)^2(\delta\omega)^2(A) + \beta b(\mu + \omega)(\delta + \mu)^2(1 - q)\delta\omega(A) + \\
& \beta b\mu(\delta + \mu)^2(1 - q)\delta\omega(A) + \beta b(\delta + \mu)^5(A) + \mu(1 - q)^4(\delta\omega)^4 + (\beta b)^2(\delta + \mu)^5 + \beta b\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega - \\
& \mu(\mu + \omega)^3(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega > 0 \\
\Longleftrightarrow & \beta b(\mu + \omega)(\delta + \mu)^4(\mu(\mu + \omega))(R_0 - 1) + 2\beta b(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega(A) + \\
& 3\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu)(1 - q)^2(\delta\omega)^2(A) + \beta b(\mu + \omega)(\delta + \mu)^2(1 - q)\delta\omega(A) + \\
& \beta b\mu(\delta + \mu)^2(1 - q)\delta\omega(A) + \beta b(\delta + \mu)^5(A) + \mu(1 - q)^4(\delta\omega)^4 + (\beta b)^2(\delta + \mu)^5 + \beta b\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega > \\
& \mu(\mu + \omega)^3(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega \\
\Longleftrightarrow & \frac{1}{\mu(\mu + \omega)^3(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega} \left[\beta b(\mu + \omega)(\delta + \mu)^4(\mu(\mu + \omega))(R_0 - 1) + \right. \\
& 2\beta b(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega(A) + 3\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu)(1 - q)^2(\delta\omega)^2(A) + \beta b(\mu + \omega)(\delta + \mu)^2(1 - q)\delta\omega(A) + \\
& \beta b\mu(\delta + \mu)^2(1 - q)\delta\omega(A) + \beta b(\delta + \mu)^5(A) + \mu(1 - q)^4(\delta\omega)^4 + (\beta b)^2(\delta + \mu)^5 + \beta b\mu(\mu + \omega)(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega + \\
& \left. \mu(\mu + \omega)^3(\delta + \mu)^3(1 - q)\delta\omega \right] > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\mu(1-q)^4(\delta\omega)^4 + (\beta b)^2(\delta+\mu)^5 + \beta b\mu(\mu+\omega)(\delta+\mu)^3(1-q)\delta\omega \right] > \\
& \frac{\mu(\mu+\omega)^3(\delta+\mu)^3(1-q)\delta\omega}{\mu(\mu+\omega)^3(\delta+\mu)^3(1-q)\delta\omega} \\
& \iff \frac{1}{\mu(\mu+\omega)^3(\delta+\mu)^3(1-q)\delta\omega} \left[\beta b(\mu+\omega)(\delta+\mu)^4(\mu(\mu+\omega))(R_0-1) + 2\beta b(\delta+\mu)^3(1-q)\delta\omega(A) + 3\mu(\mu+\omega)(\delta+\mu)(1-q)^2(\delta\omega)^2(A) + \beta b(\mu+\omega)(\delta+\mu)^2(1-q)\delta\omega(A) + \beta b\mu(\delta+\mu)^2(1-q)\delta\omega(A) + \beta b(\delta+\mu)^5(A) + \mu(1-q)^4(\delta\omega)^4 + (\beta b)^2(\delta+\mu)^5 + \beta b\mu(\mu+\omega)(\delta+\mu)^3(1-q)\delta\omega \right] > 1
\end{aligned}$$

Karena semua parameter bernilai positif dan $0 \leq q \leq 1$, maka terbukti bahwa $a_1a_2 - a_3(1) > 0$ jika $R_0 > 1$.

3. Akan ditunjukkan $a_1a_2a_3 - a_3a_3(1) > 0$. Sebelumnya, ekspresi tersebut akan disederhanakan terlebih dahulu.

$$a_1a_2a_3 - a_3a_3(1) = a_3(a_1a_2 - a_3(1))$$

Diketahui bahwa $a_1a_2 - a_3(1) > 0$ jika $R_0 > 1$, sehingga untuk membuktikan $a_1a_2a_3 - a_3a_3(1) > 0$ cukup dibuktikan bahwa $a_3 > 0$.

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{\beta b(\delta+\mu)^2(\mu+\omega)}{A} - \frac{\beta b(\delta+\mu)(1-q)\delta\omega}{A} - A\mu \\
&\iff = \frac{\beta b(\delta+\mu)^2(\mu+\omega) - \beta b(\delta+\mu)(1-q)\delta\omega - A^2\mu}{A} \\
&\iff = \frac{\beta b(\delta+\mu) \left((\delta+\mu)(\mu+\omega) - (1-q)\delta\omega \right) - A^2\mu}{A} \\
&\iff = \frac{\beta b(\delta+\mu)^2(\mu+\omega) - \beta b(\delta+\mu)(1-q)\delta\omega - A^2\mu}{A} \\
&\iff = \frac{\beta b(\delta+\mu)A - A^2\mu}{A} \\
&\iff = \frac{A}{A} \left(\beta b(\delta+\mu) - A\mu \right) \\
&\iff = \beta b(\delta+\mu) - \left((\delta+\mu)(\mu+\omega) - (1-q)\delta\omega \right) \mu \\
&\iff = \beta b(\delta+\mu) - \mu(\delta+\mu)(\mu+\omega) + (1-q)\delta\omega\mu \\
&\iff = (\delta+\mu) \left(\beta b - \mu(\mu+\omega) \right) + (1-q)\delta\omega\mu \\
&\iff = (\delta+\mu) \left(R_0(\mu(\mu+\omega)) - \mu(\mu+\omega) \right) + (1-q)\delta\omega\mu \\
&\iff = (\delta+\mu)(R_0-1)(\mu(\mu+\omega)) + (1-q)\delta\omega\mu
\end{aligned}$$

Karena semua parameter bernilai positif dan $0 \leq q \leq 1$, maka $a_3 > 0$ jika $R_0 > 1$. Dengan demikian, karena $a_3 > 0$ dan diketahui sebelumnya bahwa $(a_1 a_2 - a_3(1)) > 0$ jika $R_0 > 1$, maka dapat disimpulkan bahwa $a_1 a_2 a_3 - a_3 a_3(1) > 0$ jika $R_0 > 1$.

Karena telah dibuktikan bahwa $a_1 > 0$, $a_1 a_2 - a_3(1) > 0$ dan $a_1 a_2 a_3 - a_3 a_3(1) > 0$ apabila $R_0 > 1$, maka berdasarkan kriteria *Hurwitz* dapat disimpulkan bahwa semua bagian real dari nilai eigen yang diperoleh dari persamaan (4.33) yaitu λ_2 , λ_3 dan λ_4 bernilai negatif. Dengan demikian, bagian real dari nilai eigen λ_1 , λ_2 , λ_3 , dan λ_4 bernilai negatif sehingga dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

Berdasarkan pembuktian di atas, diperoleh teorema yang berbunyi sebagai berikut:

Teorema 4.5.2

Titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah (E_1) dikatakan stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh, maka syarat kestabilan dari titik ekuilibrium disajikan pada tabel (4.3) berikut:

Tabel 4.3. Tabel Titik Ekuilibrium Dan Syaratnya

Titik Ekuilibrium	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E^0 = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0, 0\right)$	Tidak ada	Stabil asimtotik lokal	Memenuhi teorema (4.5.1)
$E_1 = (S^*, I^*, G^*, R^*)$	$\beta b(\delta + \mu) - \delta \omega q \mu - \delta \mu^2 - \mu^3 - \omega \mu^2 > 0$	Stabil asimtotik lokal	Memenuhi teorema (4.5.2)

$$\text{dengan } S^* = \frac{\delta \omega q + \delta \mu + \mu^2 + \omega \mu}{\beta(\delta + \mu)}, \quad I^* = \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta \omega q \mu - \delta \mu^2 - \mu^3 - \omega \mu^2}{\beta \delta \omega q + \beta \delta \mu + \beta \mu^2 + \beta \omega \mu},$$

$$G^* = \frac{\omega}{\delta + \mu} \cdot \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta \omega q \mu - \delta \mu^2 - \mu^3 - \omega \mu^2}{\beta \delta \omega q + \beta \delta \mu + \beta \mu^2 + \beta \omega \mu}, \quad \text{dan } R^* = \frac{q \delta \omega}{\mu(\delta + \mu)} \cdot \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta \omega q \mu - \delta \mu^2 - \mu^3 - \omega \mu^2}{\beta \delta \omega q + \beta \delta \mu + \beta \mu^2 + \beta \omega \mu}.$$

F. Simulasi Numerik

Pada bagian ini, akan diinterpretasikan hasil dari simulasi numerik untuk mendukung hasil solusi analisis dinamik. Simulasi model akan dilakukan menggunakan bantuan Matlab R2013a dengan metode Runge-Kutta orde empat yang dilakukan terhadap titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah (E^0) dan titik ekuilibrium endemik (E_1). Pada semua simulasi numerik menggunakan waktu awal $t = 0$.

1. Simulasi I: Titik Ekuilibrium Bebas Anak Putus Sekolah

Nilai dari parameter yang digunakan untuk simulasi numerik ketika dalam keadaan bebas anak putus sekolah pada Tabel (4.4) berikut:

Tabel 4.4. Parameter Model

Parameter	Nilai	Sumber
b	500	Kourrad (2023)
β	0,0001	Asumsi
ω	0,35	Ayoade (2022)
δ	0,4	Ayoade (2022)
q	0,65	Asumsi
μ	0,3	Obasuyi (2020)

Adapun nilai awal dari variabel yang digunakan adalah

Tabel 4.5. Nilai Awal Dari Variabel

Populasi Awal	Nilai Awal	Sumber
$S(0)$	114.230	BPS Kabupaten Rembang (2023)
$I(0)$	500	BAPPEDA Kabupaten Rembang (2023)
$G(0)$	500	BAPPEDA Kabupaten Rembang (2023)
$R(0)$	326	BAPPEDA Kabupaten Rembang (2023)

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel (4.5), maka didapatkan

hasil bilangan reproduksi dasar yaitu:

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \frac{\beta b}{\mu(\mu + \omega)} \\
 \Longleftrightarrow &= \frac{(0,0001)(500)}{(0,3)(0,3 + 0,35)} \\
 \Longleftrightarrow &= \frac{0,05}{0,195} \\
 \Longleftrightarrow &\approx 0,256 < 1
 \end{aligned}$$

Karena $R_0 < 1$, maka dapat disimpulkan bahwa sindrom anak putus sekolah tidak menyebar atau bebas dari sindrom tersebut dalam kurun waktu tertentu dengan titik ekuilibrium bebas dari anak putus sekolah sebagai berikut:

- a. Titik ekuilibrium subpopulasi rentan untuk putus sekolah (S^0).

Berdasarkan persamaan (4.11) diperoleh

$$\begin{aligned}
 S^0 &= \frac{b}{\mu} \\
 \Longleftrightarrow &= \frac{500}{0,3} \\
 \Longleftrightarrow &= 1666,667
 \end{aligned}$$

- b. Titik ekuilibrium subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah (I^0).

Berdasarkan persamaan (4.18) diperoleh

$$I^0 = 0$$

- c. Titik ekuilibrium subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus

sekolah dan mendapatkan program GASPOL 12 (G^0).

Berdasarkan persamaan (4.12) diperoleh

$$G^0 = 0$$

- d. Titik ekuilibrium subpopulasi yang kembali bersekolah baik sekolah formal maupun nonformal (R^0).

Berdasarkan persamaan (4.13) diperoleh

$$R^0 = 0$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas dari anak putus sekolah yaitu $E^0 = (1666, 67; 0; 0; 0)$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan perolehan hasil simulasi dari kestabilan lokal titik ekuilibrium yang bebas dari anak putus sekolah. Sebelumnya diketahui bahwa

$$(-\mu - \lambda)^2 \left[\lambda^2 + \lambda \left[(\mu + \omega) + (\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) \right] + (\mu + \omega)(\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) (\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \right] = 0 \quad (4.39)$$

*Proses substitusi dan penyelesaian persamaan karakteristik (4.39) untuk menentukan nilai eigen baik secara manual maupun menggunakan bantuan *software* MATLAB 2013a disajikan pada **Lampiran 1**.

Lampiran perhitungan detail didapatkan hasil pada Tabel (4.6) di bawah ini:

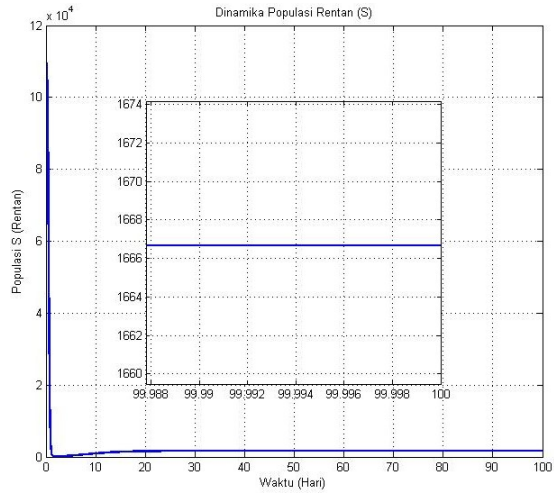
Tabel 4.6. Tabel Nilai Eigen Dan Hasil

Nilai Eigen	Hasil
λ_1	-0,3
λ_2	-0,3
λ_3	-0,3452
λ_4	-0,8381

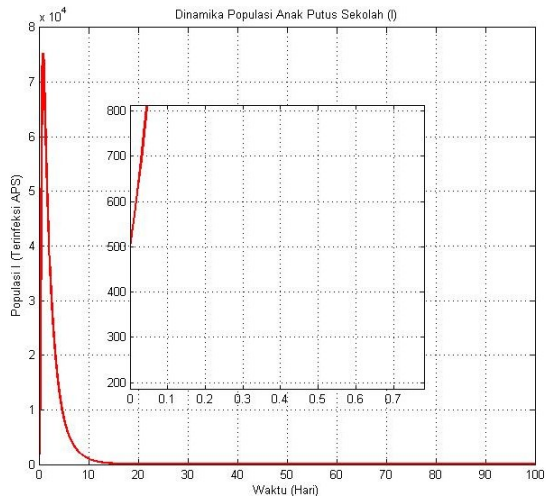
Diketahui bahwa semua bagian real dari nilai-nilai eigen pada persamaan (4.39) bernilai negatif sehingga terbukti bahwa titik ekuilibrium bebas dari anak putus sekolah dikatakan stabil asimtotik lokal karena semua bagian real dari nilai-nilai eigen-nya yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ bernilai negatif.

Selanjutnya, akan ditunjukkan hasil simulasi numerik ketika bebas dari anak putus sekolah dengan bantuan *software* MATLAB R2013a yang terlihat pada Gambar (4.2) - Gambar (4.5) dengan interval waktu dari hari ke-0 sampai dengan hari ke-100.

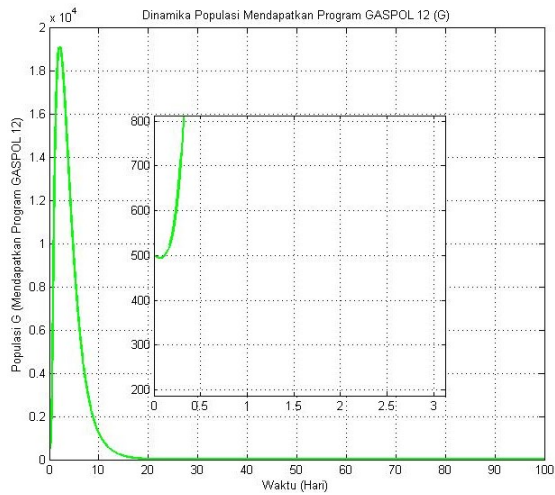
*Kode MATLAB untuk menunjukkan hasil simulasi numerik pada kondisi bebas anak putus sekolah disajikan pada **Lampiran 2**.



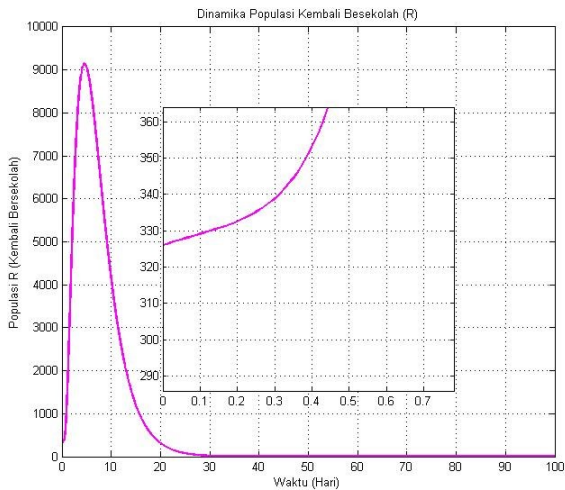
Gambar 4.2. Simulasi Subpopulasi Rentan Untuk Putus Sekolah (S^0)



Gambar 4.3. Simulasi Subpopulasi Yang Terinfeksi Sindrom Putus Sekolah (I^0)



Gambar 4.4. Simulasi Subpopulasi Yang Terinfeksi Sindrom Putus Sekolah Dan Mendapatkan Program GASPOL 12 (G^0)



Gambar 4.5. Simulasi Subpopulasi Yang Kembali Bersekolah Baik Secara Formal maupun Nonformal (R^0)

Berdasarkan Gambar (4.2), subpopulasi rentan untuk putus sekolah (S^0) mengalami penurunan sampai hari ke-10, kemudian naik kembali sampai waktu ke-60 konvergen menuju 1.666,67 atau dikatakan stabil. Selanjutnya pada Gambar (4.3), subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah (I^0) mengalami peningkatan sampai hari ke-10, kemudian menurun hingga hari ke-50 konvergen menuju 0 atau dikatakan stabil.

Pada Gambar (4.4), subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah dan mendapatkan program GASPOL 12 (G^0) mengalami peningkatan sampai hari ke-10, kemudian menurun hingga hari ke-50 konvergen menuju 0 atau dikatakan stabil. Selanjutnya Gambar (4.5), subpopulasi yang kembali bersekolah baik sekolah formal maupun nonformal (R^0) mengalami peningkatan sampai hari ke-10, lalu menurun hingga hari ke-60 konvergen menuju 0 atau dikatakan stabil.

Berdasarkan penjelasan dari Gambar (4.2) - Gambar (4.5), dapat disimpulkan bahwa setiap subpopulasi akan menuju ke titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah. Hal tersebut dapat dilihat dari solusi setiap subpopulasi S^0 , I^0 , G^0 dan R^0 secara berurutan menuju 1.666,67; 0; 0; 0.

Selanjutnya, akan ditampilkan grafik dengan nilai bilangan reproduksi dasar (R_0) yang berbeda tetapi nilainya kurang dari satu. Tujuan menampilkan grafik dengan nilai R_0 yang berbeda yaitu untuk melihat kondisi titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah. Bilangan reproduksi dasar yang berbeda ini diperoleh dengan mengganti nilai parameter β yang disajikan dalam Tabel (4.7) berikut:

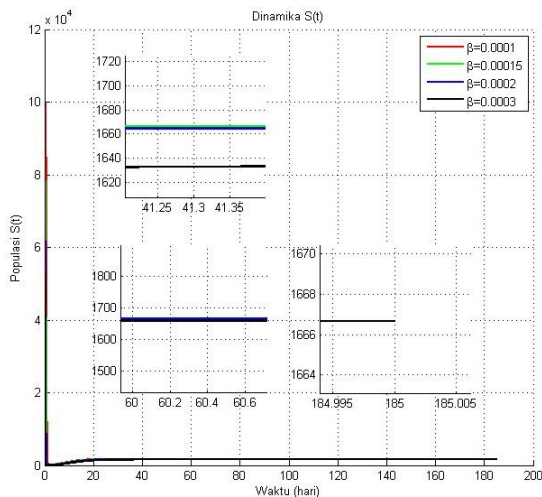
*Detail perhitungan numerik dengan bantuan perangkat lunak MATLAB 2013a dapat dilihat pada **Lampiran 3**.

Tabel 4.7. Nilai R_0 Dan Titik Ekuilibrium Dengan Berbagai Nilai Parameter β

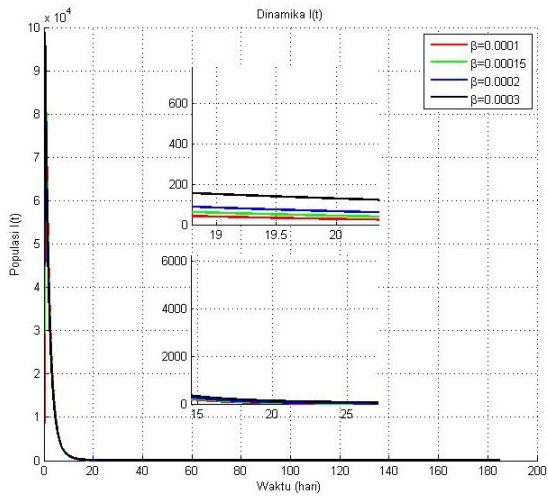
Parameter β	R_0	TE Bebas Anak Putus Sekolah
0,0001	0,256	(1.666, 67; 0; 0; 0)
0,00015	0,38	(1.666, 67; 0; 0; 0)
0,0002	0,51	(1.666, 67; 0; 0; 0)
0,0003	0,77	(1.666, 67; 0; 0; 0)

Berdasarkan Tabel (4.7) diperoleh hasil simulasi titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah sebagai berikut:

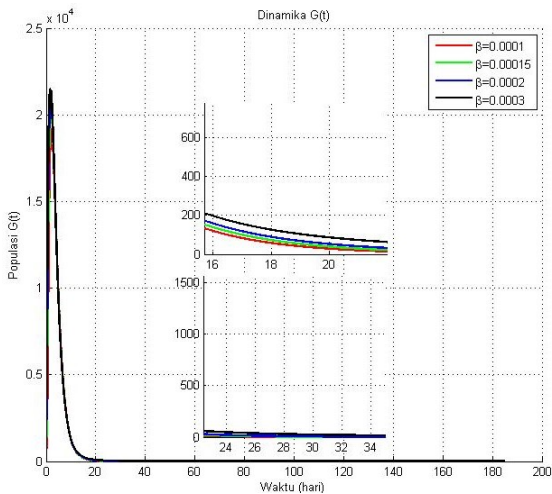
*Kode MATLAB untuk simulasi titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah dengan berbagai nilai β dapat dilihat pada **Lampiran 4**.



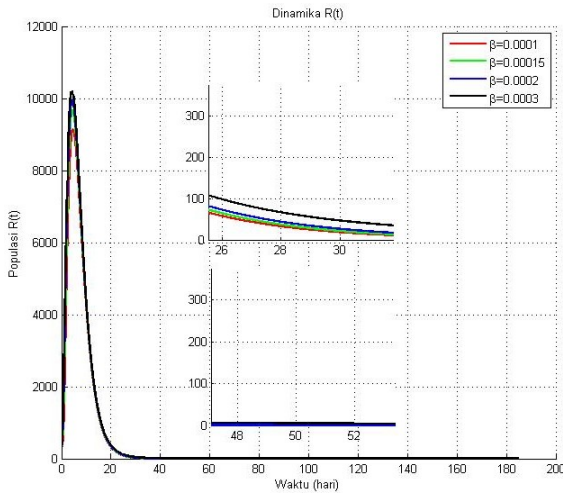
Gambar 4.6. Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (S^0)



Gambar 4.7. Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (I^0)



Gambar 4.8. Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (G^0)



Gambar 4.9. Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (R^0)

Berdasarkan Gambar (4.6) - Gambar (4.9) menunjukkan bahwa laju kontak antara subpopulasi rentan putus sekolah dengan subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah memiliki peran yang signifikan dalam penyebaran sindrom tersebut. Hal ini dikarenakan dengan mengubah nilai parameter β sementara nilai parameter lainnya tetap konstan, maka akan terjadi perubahan pada nilai R_0 . Hal tersebut dapat dilihat pada Tabel (4.7). Semakin besar nilai parameter β , maka semakin besar pula nilai R_0 , begitu pula sebaliknya. Selama nilai $R_0 < 1$, maka grafik solusi akan konvergen menuju titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah.

Ketika parameter β berada dalam rentang $0,00035 \leq \beta \leq 0,00038$ dan memenuhi syarat $R_0 < 1$, sistem akan memiliki dua titik ekuilibrium yang eksis. Jika diambil nilai $\beta = 0,00035$; $b = 500$; $\omega = 0,35$; $\delta = 0,4$; $q = 0,65$ dan $\mu = 0,3$, maka nilai-nilai ini

dapat disubstitusikan ke dalam sistem (4.5) sehingga diperoleh

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 500 - (0,00035)SI - (0,3)S \\ \frac{dI}{dt} = (0,00035)SI + (0,14)G - (0,65)I \\ \frac{dG}{dt} = (0,35)I - (0,7)G \\ \frac{dR}{dt} = (0,26)G - (0,3)R \end{cases} \quad (4.40)$$

*Perhitungan titik ekuilibrium dengan nilai $\beta = 0,00035$ pada sistem (4.40) dapat dilihat pada **Lampiran 5**.

Dari sistem (4.40) diperoleh dua nilai I , yaitu $I^0 = 0$ dan $I^* = 4,93$. Ketika nilai $I^0 = 0$ diperoleh titik ekuilibrium $E^0 = (1666,67; 0; 0; 0)$ dan ketika nilai $I = 4,93$ diperoleh titik ekuilibrium $E_1 = (1657,14; 4,93; 2,46; 2,13)$. Selanjutnya, dengan menggunakan bantuan *software* Maple 11 akan dicari nilai eigen dari masing-masing titik ekuilibrium E^0 dan E_1 . Untuk titik ekuilibrium E^0 diperoleh nilai eigen seperti pada Tabel (4.8) di bawah ini:

*Perhitungan detail dapat dilihat pada **Lampiran 6**.

Tabel 4.8. Tabel Nilai Eigen Pada Titik Ekuilibrium E_{01}

Nilai Eigen	Hasil
λ_1	-0,299999999999999988
λ_2	-0,769698158043258250
λ_3	0,00303149144325853826
λ_4	-0,299999999999999988

Sedangkan untuk titik ekuilibrium E_1 diperoleh nilai eigen seperti pada Tabel (4.9) di bawah ini:

*Perhitungan detail dapat dilihat pada **Lampiran 7**.

Tabel 4.9. Tabel Nilai Eigen Pada Titik Ekuilibrium E_{02}

Nilai Eigen	Hasil
λ_1	-0,769806272649962596
λ_2	-0,00304247089452058806
λ_3	-0,298875394355516910
λ_4	-0,299999999999999820

Dari hasil perhitungan nilai eigen, diketahui bahwa titik ekuilibrium E^0 bersifat tidak stabil karena terdapat satu nilai eigen yang positif, sedangkan titik ekuilibrium E_1 bersifat stabil karena semua nilai eigennya negatif. Ketika nilai parameter β berubah dan mencapai $\beta = 0,00035$ terjadi perubahan kestabilan sistem yaitu titik ekuilibrium yang sebelumnya tidak stabil menjadi stabil. Perubahan sifat kestabilan ini menunjukkan adanya fenomena bifurkasi pada sistem (4.5). Dalam teori bifurkasi, parameter yang menyebabkan perubahan kestabilan titik ekuilibrium disebut sebagai **parameter bifurkasi**. Oleh karena itu, perubahan kecil pada nilai β yang menyebabkan perubahan kestabilan sistem menunjukkan bahwa β berperan sebagai parameter bifurkasi dalam model ini.

Dengan menggunakan metode yang sama seperti pada perhitungan titik ekuilibrium dan nilai eigen untuk $\beta = 0,00035$, diperoleh titik ekuilibrium serta nilai eigen untuk $\beta = 0,00036$; $\beta = 0,00037$ dan $\beta = 0,00038$ sebagaimana disajikan dalam tabel berikut:

* Perhitungan titik ekuilibrium dan nilai eigen untuk berbagai nilai

β menggunakan Maple disajikan secara rinci pada **Lampiran 8**.

Tabel 4.10. Titik Ekuilibrium, Nilai Eigen, dan Kestabilan untuk Berbagai Nilai β

β	Titik Ekuilibrium (TE)	Nilai Eigen	Kestabilan
0,00036	(1666,67; 0; 0; 0)	$\lambda_1 = -0,299, \lambda_2 = -0,768$ $\lambda_3 = 0,018, \lambda_4 = -0,299$	Tidak stabil
	(1611,11; 28,74; 14,37; 12,45)	$\lambda_1 = -0,768, \lambda_2 = -0,019$ $\lambda_3 = -0,292, \lambda_4 = -0,299$	Stabil
0,00037	(1666,67; 0; 0; 0)	$\lambda_1 = -0,299, \lambda_2 = 0,033$ $\lambda_3 = -0,766, \lambda_4 = -0,299$	Tidak stabil
	(1567,57; 51,26; 25,63; 22,21)	$\lambda_1 = -0,767, \lambda_2 = -0,0355$ $\lambda_3 = -0,286, \lambda_4 = -0,299$	Stabil
0,00038	(1666,67; 0; 0; 0)	$\lambda_1 = -0,299, \lambda_2 = 0,044$ $\lambda_3 = -0,765, \lambda_4 = -0,299$	Tidak stabil
	(1526,32; 72,60; 36,30; 31,46)	$\lambda_1 = -0,766, \lambda_2 = -0,052$ $\lambda_3 = -0,278, \lambda_4 = -0,30$	Stabil

Secara umum, bifurkasi menurut Lynch (2010) yang dikutip oleh Aini (2021) didefinisikan sebagai sebuah bidang vektor $f \in \mathbb{R}^2$ yang terdeferensialkan secara kontinu dan disebut stabil secara struktur (*structurally stable*) jika terdapat gangguan kecil pada sistem $\vec{x} = f(x)$ yang tidak menyebabkan perubahan kualitatif dalam perilaku sistem. Gejala bifurkasi ditandai dengan adanya perubahan kestabilan atau perilaku sistem ketika nilai parameter dari sistem tersebut diubah-ubah (Aini, 2021).

Bifurkasi yang terjadi pada sistem (4.5) merupakan bifurkasi transkritikal karena titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah dan titik ekuilibrium non-trivial bertukar jenis kestabilan. Hal ini berarti bahwa sebelum mencapai nilai ambang atau titik bifurkasi, titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah yang awalnya stabil mengalami sedikit gangguan sehingga menyebabkan titik tidak stabil. Sebaliknya, titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah akan muncul dan menjadi stabil. Perhitungan detail terkait bifurkasi tidak dibahas lebih lanjut dalam skripsi ini.

2. Simulasi II: Titik Ekuilibrium Endemik Anak Putus Sekolah

Nilai dari parameter yang digunakan untuk simulasi numerik ketika keadaan endemik anak putus sekolah pada Tabel (4.11) berikut::

Tabel 4.11. Parameter Model

Parameter	Nilai	Sumber
b	500	Kourrad (2023)
β	0,0005	Asumsi
ω	0,35	Ayoade (2022)
δ	0,4	Ayoade (2022)
q	0,65	Asumsi
μ	0,3	Obasuyi (2020)

Adapun nilai awal dari variabel yang digunakan adalah

Tabel 4.12. Nilai Awal Dari Variabel

Populasi Awal	Nilai Awal	Sumber
$S(0)$	114.230	BPS Kabupaten Rembang (2023)
$I(0)$	500	BAPPEDA Kabupaten Rembang (2023)
$G(0)$	500	BAPPEDA Kabupaten Rembang (2023)
$R(0)$	326	BAPPEDA Kabupaten Rembang (2023)

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel (4.11), maka didapatkan hasil bilangan reproduksi dasar, yaitu:

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \frac{\beta b}{\mu(\mu + \omega)} \\
 \iff &= \frac{(0,0005)(500)}{(0,3)(0,3 + 0,35)} \\
 \iff &= \frac{0,25}{0,195} \\
 \iff &\approx 1,282 > 1
 \end{aligned}$$

Karena $R_0 > 1$, maka dapat disimpulkan bahwa sindrom anak putus sekolah menyebar atau dalam kondisi endemik dalam kurun waktu tertentu dengan titik ekuilibrium endemik sebagai berikut:

- Titik ekuilibrium subpopulasi rentan untuk putus sekolah (S^*).

Berdasarkan persamaan (4.22) diperoleh

$$\begin{aligned}
S^* &= \frac{(\delta\omega q + \delta\mu + \mu^2 + \omega\mu)}{\beta(\delta + \mu)} \\
\iff &= \frac{((0,4)(0,35)(0,65) + (0,4)(0,3) + (0,3)^2 + (0,35)(0,3))}{(0,0005)((0,4) + (0,3))} \\
\iff &= \frac{0,091 + 0,12 + 0,09 + 0,105}{(0,0005)(0,7)} \\
\iff &= \frac{0,406}{0,00035} \\
\iff &= 1160
\end{aligned}$$

- b. Titik ekuilibrium subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah (I^*).

Berdasarkan persamaan (4.21) diperoleh

$$\begin{aligned}
I^* &= \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \mu^2\delta - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\mu\delta + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu} \\
\iff &= \frac{(0,0005)(500)((0,4) + (0,3)) - (0,4)(0,35)(0,65)(0,3) - (0,3)^2(0,4) - (0,3)^3 - (0,35)(0,3)^2}{(0,0005)(0,4)(0,35)(0,65) + (0,0005)(0,3)(0,4) + (0,0005)(0,3)^2 + (0,0005)(0,35)(0,3)} \\
\iff &= \frac{0,175 - 0,0273 - 0,036 - 0,027 - 0,0315}{0,0000455 + 0,00006 + 0,000045 + 0,0000525} \\
\iff &= \frac{0,0532}{0,000203} \\
\iff &= 262,069
\end{aligned}$$

- c. Titik ekuilibrium subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah dan mendapatkan program GASPOL 12 (G^*).

Berdasarkan persamaan (4.23) diperoleh

$$\begin{aligned}
G^* &= \frac{\omega}{(\delta + \mu)} \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu} \\
\iff &= \left(\frac{(0,35)}{((0,4) + (0,3))} \right) \\
&\quad \left(\frac{((0,0005)(500)((0,4) + (0,3)) - (0,4)(0,35)(0,65)(0,3) - (0,4)(0,3)^2 - (0,3)^3 - (0,35)(0,3)^2)}{(0,0005)(0,4)(0,35)(0,65) + (0,0005)(0,4)(0,3) + (0,0005)(0,3)^2 + (0,0005)(0,35)(0,3)} \right) \\
\iff &= \frac{0,35}{0,7} \frac{0,175 - 0,0273 - 0,036 - 0,027 - 0,0315}{0,0000455 + 0,00006 + 0,000045 + 0,0000525} \\
\iff &= \frac{0,35}{0,7} \frac{0,0532}{0,000203} \\
\iff &= \frac{0,01862}{0,0001421} \\
\iff &= 131,03
\end{aligned}$$

- d. Titik ekuilibrium subpopulasi yang kembali bersekolah baik sekolah formal maupun nonformal (R^*).

Berdasarkan persamaan (4.24) diperoleh

$$\begin{aligned}
 R^* &= \frac{q\delta\omega}{\mu(\delta+\mu)} \frac{\beta b(\delta+\mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu} \\
 \iff &= \left(\frac{(0,65)(0,4)(0,35)}{(0,3)((0,4)+(0,3))} \right) \\
 &\quad \left(\frac{(0,0005)(500)((0,4)+(0,3)) - (0,4)(0,35)(0,65)(0,3) - (0,4)(0,3)^2 - (0,3)^3 - (0,35)(0,3)^2}{(0,0005)(0,4)(0,35) + (0,0005)(0,4)(0,3) + (0,0005)(0,3)^2 + (0,0005)(0,35)(0,3)} \right) \\
 \iff &= \frac{0,091}{0,21} \frac{0,175 - 0,0273 - 0,036 - 0,027 - 0,0315}{0,0000455 + 0,00006 + 0,000045 + 0,0000525} \\
 \iff &= \frac{0,091}{0,21} \frac{0,0532}{0,000203} \\
 \iff &= \frac{0,0048412}{0,00004263} \\
 \iff &= 113,56
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah yaitu $E_1 = (1160; 262,069; 131,03; 113,56)$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan perolehan hasil simulasi dari kestabilan lokal titik ekuilibrium yang endemik dari anak putus sekolah. Sebelumnya diketahui bahwa

$$\begin{aligned}
 (-\mu - \lambda) &\left(\lambda^3 + \left[-\frac{A}{\delta+\mu} + (\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta+\mu)}{A} + (\delta + \mu) \right] \lambda^2 + \left[-A - \beta b - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. (1 - q)\delta\omega + \frac{\beta b(\delta+\mu)^2}{A} + (\mu + \omega)(\delta\mu) + \frac{\beta b(\delta+\mu)}{A}(\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta+\mu) - A\mu}{\delta+\mu} \right] \lambda + \right. \\
 &\quad \left. \left[\frac{\beta b(\delta + \mu)^2(\mu + \omega)}{A} - \frac{\beta b(\delta + \mu)(1 - q)\delta\omega}{A} - A\mu \right] \right) = 0 \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

*Proses substitusi dan penyelesaian persamaan karakteristik (4.41) untuk menentukan nilai eigen baik secara manual maupun menggunakan bantuan *software* MATLAB 2013a disajikan pada **Lampiran 9**.

Lampiran perhitungan detail didapatkan hasil seperti pada Tabel (4.13) seperti di bawah ini:

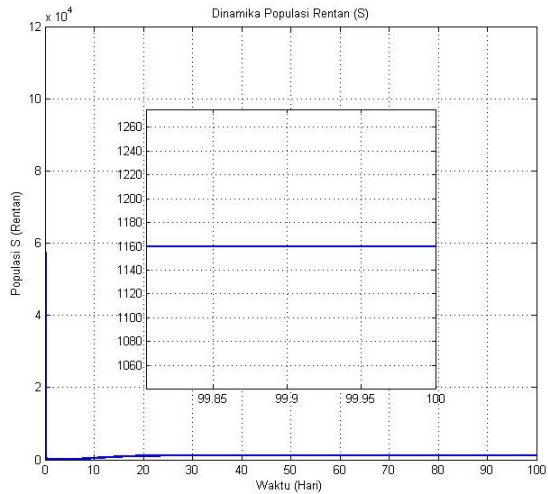
Tabel 4.13. Tabel Nilai Eigen Dan Hasil

Nilai Eigen	Hasil
λ_1	-0,3
λ_2	-0,7533
λ_3	-0,2239
λ_4	-0,2239

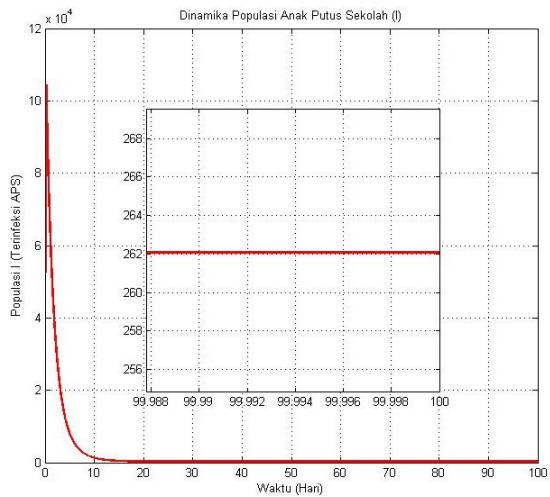
Diketahui bahwa semua bagian real dari nilai-nilai eigen pada persamaan (4.41) bernilai negatif sehingga terbukti bahwa titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah dikatakan stabil asimtotik lokal karena semua bagian real dari nilai-nilai eigen-nya yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ bernilai negatif.

Selanjutnya, akan ditunjukkan hasil simulasi numerik ketika endemik anak putus sekolah dengan bantuan *software* MATLAB R2013a yang terlihat pada Gambar (4.10) - Gambar (4.13) dengan interval waktu dari hari ke-0 sampai dengan hari ke-100.

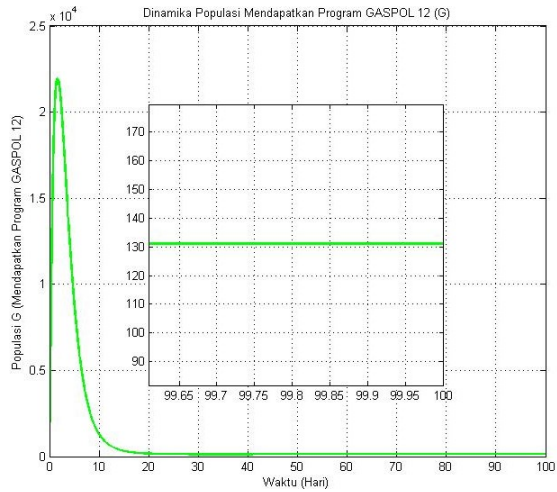
*Kode MATLAB untuk menunjukkan hasil simulasi numerik pada kondisi endemik anak putus sekolah disajikan pada **Lampiran 10**.



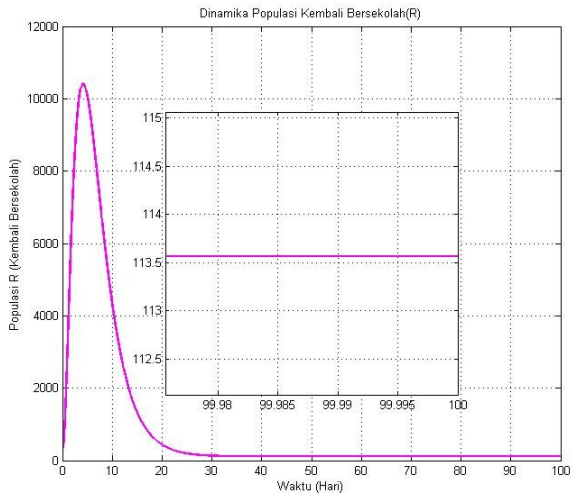
Gambar 4.10. Simulasi Subpopulasi Yang Rentan Untuk Putus Sekolah (S^*)



Gambar 4.11. Simulasi Subpopulasi Yang Terinfeksi Sindrom Putus Sekolah (I^*)



Gambar 4.12. Simulasi Subpopulasi Yang Terinfeksi Putus Sekolah Dan Mendapatkan Program GASPOL 12 (G^*)



Gambar 4.13. Simulasi Subpopulasi Yang Kembali Bersekolah Baik Secara Formal Maupun Nonformal (R^*)

Berdasarkan Gambar (4.10), subpopulasi yang rentan untuk putus sekolah (S^*) menurun hingga hari ke-10. Lalu meningkat kembali hingga hari ke-70 konvergen menuju 1.160 atau dikatakan stabil. Selanjutnya pada Gambar (4.11), subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah (I^*) mengalami peningkatan sampai hari ke-10. Kemudian mengalami penurunan hingga hari ke-60 konvergen menuju 262,07 atau dikatakan stabil.

Pada Gambar (4.12), subpopulasi yang terinfeksi putus sekolah dan mendapatkan program GASPOL 12 (G^*) mengalami peningkatan sampai hari ke-10. Lalu mengalami penurunan hingga hari ke-70 konvergen menuju 131,03 atau dikatakan stabil. Gambar (4.13), subpopulasi yang kembali bersekolah baik secara formal maupun nonformal (R^*) mengalami peningkatan hingga hari ke-10. Kemudian menurun hingga hari ke-70 konvergen menuju 113,56 atau dikatakan stabil.

Berdasarkan penjelasan dari Gambar (4.10) - Gambar (4.13), dapat disimpulkan bahwa setiap subpopulasi menuju ke titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah. Hal tersebut dapat dilihat dari solusi setiap subpopulasi S^* , I^* , G^* , dan R^* secara berurutan menuju 1.160; 262,07; 131,03; 113,56.

Selanjutnya, akan ditampilkan grafik dengan nilai bilangan reproduksi dasar (R_0) yang berbeda tetapi nilainya lebih dari satu. Tujuan menampilkan grafik dengan nilai R_0 yang berbeda yaitu untuk melihat kondisi titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah. Bilangan reproduksi dasar yang berbeda ini diperoleh dengan mengganti nilai parameter β yang disajikan dalam Tabel (4.14) berikut:

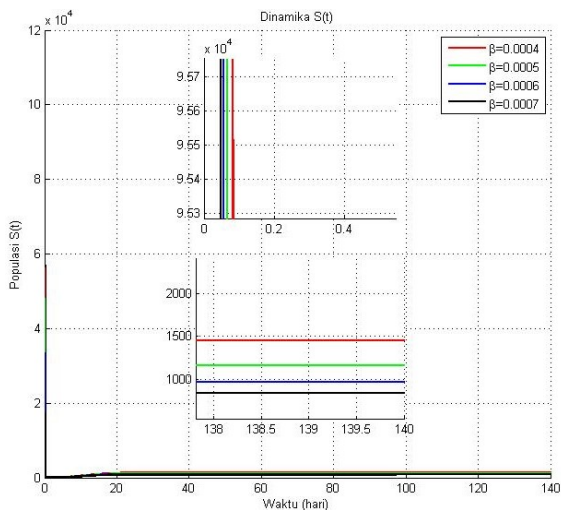
*Detail perhitungan numerik dengan bantuan *software* MATLAB 2013a dapat dilihat pada **Lampiran 11**.

Tabel 4.14. Nilai R_0 Dan Titik Ekuilibrium Dengan Berbagai Nilai Parameter β

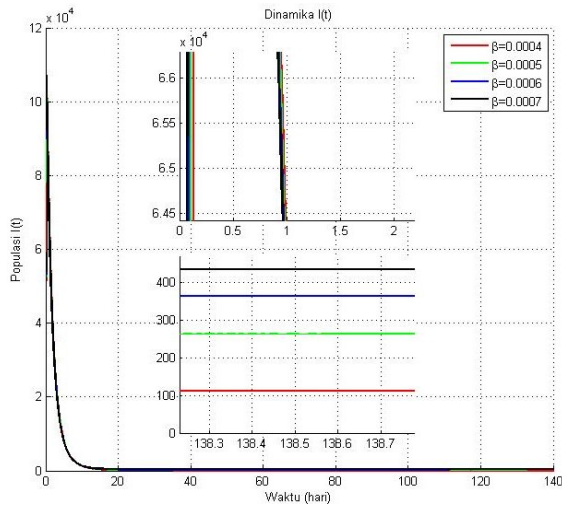
Parameter β	R_0	TE Endemik Anak Putus Sekolah
0,0004	1,03	(1.450; 112, 07; 56, 03; 48, 56)
0,0005	1,28	(1.160; 262, 07; 131, 03; 113, 56)
0,0006	1,54	(966, 67; 362, 07; 181, 03; 156, 90)
0,0007	1,79	(828, 57; 433, 50; 216, 75; 187, 85)

Berdasarkan Tabel (4.14) diperoleh hasil simulasi titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah sebagai berikut:

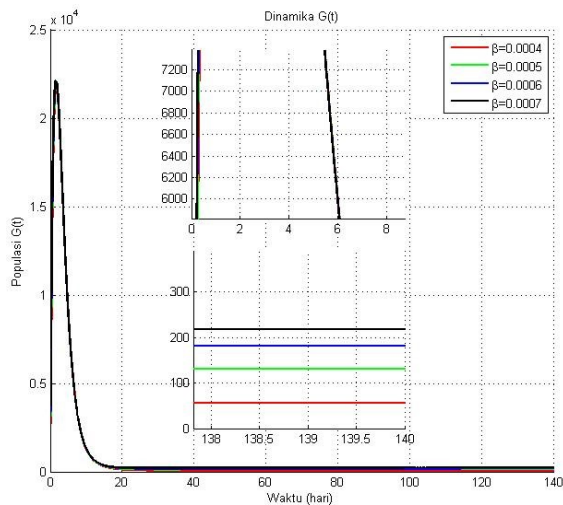
*Kode MATLAB 2013a untuk simulasi titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah dengan berbagai nilai β dapat dilihat pada **Lampiran 12**.



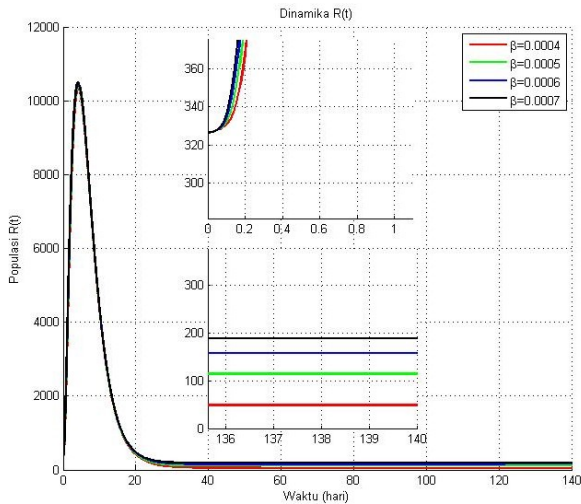
Gambar 4.14. Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (S^*)



Gambar 4.15. Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (I^*)



Gambar 4.16. Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (G^*)



Gambar 4.17. Simulasi Pengaruh Perubahan β Terhadap Subpopulasi (R^*)

Berdasarkan Gambar (4.14) - Gambar (4.17) dapat dilihat bahwa laju kontak (β) antara subpopulasi rentan putus sekolah dan subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah memiliki peran penting dalam penyebaran sindrom tersebut. Ketika nilai β dinaikkan sementara nilai parameter lainnya tetap, nilai bilangan reproduksi dasar juga meningkat. Selama $R_0 > 1$, maka grafik solusi akan konvergen menuju titik ekuilibrium endemik yaitu keadaan di mana sindrom putus sekolah tetap ada dan stabil dalam populasi. Peningkatan nilai β menyebabkan naiknya jumlah subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah (I^*) maupun jumlah subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah dan mendapatkan program GASPOL 12 (G^*). Hal ini menunjukkan bahwa semakin tinggi tingkat kontak antara individu rentan dan individu terinfeksi putus sekolah, maka semakin besar pula potensi penyebaran sindrom putus sekolah dalam populasi.

Temuan ini sejalan dengan studi oleh Merani, dkk (2020), yang mengungkapkan bahwa faktor utama yang mempengaruhi anak putus sekolah di lingkungan Perumahan Buper Waena Kota Jayapura adalah lingkungan sosial yang diikuti oleh faktor ekonomi, keluarga, kurangnya minat belajar, dan sarana prasarana sekolah. Lingkungan sosial menjadi faktor paling dominan karena anak-anak sering kali terpengaruh oleh teman sebaya yang putus sekolah sehingga menciptakan pola perilaku negatif seperti keterlibatan dalam tindak kriminal, konsumsi alkohol, serta keengganan untuk melanjutkan pendidikan atau mencari pekerjaan. Dampak negatif ini meluas ke lingkungan sosial sehingga menciptakan suasana yang tidak kondusif bagi perkembangan anak-anak lainnya. Dengan demikian, model matematika yang menunjukkan bahwa peningkatan nilai β menyebabkan naiknya jumlah subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah sejalan dengan temuan tersebut. Hal ini menekankan pentingnya program pemerintah yang efektif untuk mengurangi laju kontak untuk mencegah penyebaran sindrom putus sekolah dalam populasi.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika dinamika anak putus sekolah dengan program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinier sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \beta SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI + (1 - q)\delta G - (\mu + \omega)I \\ \frac{dG}{dt} = \omega I - (\delta + \mu)G \\ \frac{dR}{dt} = q\delta G - \mu R \end{cases}$$

dengan jumlah populasi $N(t) = S(t) + I(t) + G(t) + R(t)$, dimana S, I, G , dan R masing-masing adalah subpopulasi yang rentan untuk putus sekolah (*Susceptible*), subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah (*Infected*), subpopulasi yang terinfeksi sindrom putus sekolah dan mendapatkan program GASPOL 12 (GASPOL), dan subpopulasi yang kembali bersekolah baik sekolah formal maupun nonformal (*Recovered*).

2. Model matematika dinamika anak putus sekolah dengan program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah $E^0 = (\frac{b}{\mu}, 0, 0, 0)$ dan titik ekuilibrium

endemik anak putus sekolah $E_1 = (S^*, I^*, G^*, R^*)$ dimana

$$S^* = \frac{\delta\omega q + \delta\mu + \mu^2 + \omega\mu}{\beta(\delta + \mu)}, \quad I^* = \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu},$$

$$G^* = \frac{\omega}{\delta + \mu} \cdot \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu}, \quad \text{dan} \quad R^* = \frac{q\delta\omega}{\mu(\delta + \mu)} \cdot \frac{\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2}{\beta\delta\omega q + \beta\delta\mu + \beta\mu^2 + \beta\omega\mu}.$$
 Titik ekuilibrium E^0 selalu eksis karena semua komponennya bernilai positif atau $E^0 \geq 0$, sedangkan titik ekuilibrium E_1 dikatakan eksis jika terpenuhi syarat $\beta b(\delta + \mu) - \delta\omega q\mu - \delta\mu^2 - \mu^3 - \omega\mu^2 > 0$. Bilangan reproduksi dasar yang diperoleh dari model ini yaitu $R_0 = \frac{\beta b}{\mu(\mu + \omega)}$. Berdasarkan analisis kestabilan titik-titik ekuilibrium, diperoleh hasil sebagai berikut:

- (a) Jika $R_0 < 1$, maka titik ekuilibrium bebas anak putus sekolah (E^0) bersifat stabil asimtotik lokal. Artinya, sindrom putus sekolah lama kelamaan akan punah dalam populasi.
 - (b) Jika $R_0 > 1$, maka titik ekuilibrium endemik anak putus sekolah (E_1) bersifat stabil asimtotik lokal. Artinya, sindrom putus sekolah menjadi masalah yang terus menyebar dalam populasi dan tidak akan hilang dengan sendirinya melainkan menetap pada tingkat tertentu dalam jangka panjang.
3. Berdasarkan hasil simulasi secara numerik dengan bantuan *software* MATLAB R2013a, diperoleh hasil bahwa ketika $R_0 < 1$, maka akan menyebabkan subpopulasi S^0 mengalami penurunan sampai waktu t , kemudian naik hingga mencapai titik stabil. Sedangkan subpopulasi I^0 , G^0 dan R^0 cenderung menurun menuju titik tetap yaitu nol karena tidak adanya sindrom putus sekolah yang menyebar dalam populasi. Sedangkan ketika $R_0 > 1$, subpopulasi S^* juga akan

mengalami penurunan sampai waktu t , kemudian akan naik hingga mencapai titik stabil. Untuk subpopulasi I^* , G^* , dan R^* cenderung mengalami penurunan hingga mencapai keadaan stabil karena masih adanya sindrom putus sekolah yang menyebar dalam populasi. Hasil simulasi numerik juga menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis secara analisis dinamikanya.

B. Saran

Pada penelitian ini, dilakukan analisis kestabilan model matematika dinamika anak putus sekolah dengan program GASPOL 12 di Kabupaten Rembang, yang mengacu pada jurnal internasional. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan agar dilakukan modifikasi pada model dengan memberikan perlakuan khusus, seperti menentukan kontrol optimal melalui penambahan variabel kontrol. Selain itu, penelitian berikutnya juga dapat mencakup analisis sensitivitas terhadap parameter dalam model serta melakukan analisis bifurkasi secara lebih mendalam.

DAFTAR PUSTAKA

- Agus, A., dkk. 2019. Model Epidemik SIR Pengguna/Pemain Mobile Games Pada Mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sulawesi Barat. *JOMTA*. 2(2): 1-8.
- Ahmed, M., dkk. 2023. COVID-19 SIR model: Bifurcation analysis and optimal control. *Results in Control and Optimization*. 12: 1-18.
- Aini, Q. 2021. Analisis Dinamik Model Mangsa Pemangsa Holling-Tanner Dengan Adanya Makanan Tambahan Pada Pemangsa. *MATHunesa*. 09(02):1-13.
- Aitken. 1944. *Determinants and Matrices*. Edisi 3. New York: Interscience Publishers.
- Alifa, Vita N. 2023. Analisis Faktor Penyebab Meningkatnya Angka Putus Sekolah di Indonesia Pada Tahun 2022. *Jurnal Pendidikan Sultan Agung*. 3(2): 1-8.
- Alligood, K. T., Sauer. T. D., & Yorke, J. A. 2000. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Edisi 3. New York, NY: Springer.
- Amdouni, B., dkk. 2017. Why do students quit school? Implications from a dynamical modelling study. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 473(2200), 20170377. <https://doi.org/10.1098/rspa.2017.0377>.

- Anton, H. 2010. *Elementary Linear Algebra*. Edisi 10. Canada: World Color.
- Anton, H. & Rorres, C. 2014. *Elementary Linear Algebra*. Edisi 11. United States: Wiley.
- Assa, R., dkk. 2022. Faktor Penyebab Anak Putus Sekolah di Desa Sonuo Kecamatan Bolangitang Barat Kabupaten Bolaang Mongondow Utara. *Jurnal Ilmiah Society*. 2(1): 1-12.
- Ayoade, Abayomi A. & Farayola, Philip I. 2022. A Mathematical Model to Address Out-of-School Children Menace for Actualization of Sustainable Development in Nigeria. *Journal of Science and Arts*. 22(3): 1-16.
- Barnes, B. & Fulford, G. R. 2009. *Mathematical Modelling with Case Studies: A Differential Equations Approach Using Maple and MATLAB*. Edisi 2. London: Taylor & Francis Group.
- BBPM Provinsi Jawa Tengah. 2023. *Berhasilnya Program GASPOL 12 di Rembang: Ratusan Siswa Kembali ke Sekolah*. Diakses di <https://tinyurl.com/bbpmpjateng/> tanggal 22 September 2024.
- Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. 2017. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Edisi 11. New York, NY: John Wiley & Sons.
- Brauer, F. & Chavez, C. C. 2012. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Edisi 2. New York: Springer.
- Cahyaningtias, Sari. 2016. Aplikasi Kriteria Routh-Hurwitz pada Kestabilan Model Interaksi Padi-Hama. *Wahana*. 66(1): 1-5.

- Chapra, Steven C. & Canale Raymond P. 2015. *Numerical Methods for Engineers*. Edisi 7. New York: McGraw-Hill Education.
- Diekmann, O., dkk. 2010. The Construction of Next-Generation Matrices for Compartmental Epidemic Models. *J. R. Soc. Interface*. 7: 1- 4.
- Driessche, P. van den & Watmough, J. 2002. Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. 180: 1-7.
- Enkekes, Yenci B. & Mardianto, L. 2022. Metode Runge-Kutta Orde 4 Dalam Penyelesaian Persamaan Gelombang 1D Syarat Batas Dirichlet. *Indonesian Journal of Applied Mathematics*. 2(1): 1-8.
- Faizah, N., Cahyono, B., & Fitriyah, A. 2019. Analisis Kestabilan Model Matematika pada Pertumbuhan Kanker dengan Pengobatan Menggunakan Virus *Oncolytic*. *SQUARE: Journal of Mathematics and Mathematics Education*. 1(1): 1-10.
- Jordan, D. W. & Smith, P. 2007. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Edisi 4. New York: Oxford University Press.
- Kerby, Molly B. 2015. Toward a New Predictive Model of Student Retention in Higher Education: An Application of Classical Sociological Theory. *Journal of College Student Retention*. 0(0): 1-24.
- Khalil, Hasan K. 1996. *Nonlinear Systems*. Edisi 2. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

- Kirkwood, James R. & Kirkwood, Bessie H. 2017. *Elementary Linear Algebra*. CRC Press.
- Kourrad, A., dkk. 2023. A Mathematical Model and Optimal Control Analysis for Scholar Drop Out. *SPM*. 41: 1-11.
- Kurnia, T. & Adi, Yudi A. 2020. Model Matematika Interaksi Sel Leukemia Dan Sel Sehat Pada Leukemia Limfoblastik. *UNNES Journal of Mathematics*. 9(1): 1-10.
- Kurniawati, Irma & Rosyidi, Abdul H. 2019. Profil Pemodelan Matematika Siswa SMP Dalam Menyelesaikan Masalah Pada Materi Fungsi Linear. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*. 8(2): 1-7.
- Layek, G. C. 2015. *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. Edisi 1. Heidelberg: Springer.
- Liu, D. 2005. *Stability. The Electrical Engineering Handbook*. Chicago: Elsavier. <https://doi.org/10.1016/B978-012170960-0/50079-7>.
- Margiyanti, I. & Maulia Siti T. 2023. Kebijakan Pendidikan Implementasi Program Wajib Belajar 12 Tahun. *Jurnal Jupensi*. 3(1): 1-10.
- Martcheva, M. 2015. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. New York: Springer.
- Merani, dkk. 2023. Identifikasi Masalah Anak Putus Sekolah dan Dampaknya Terhadap Lingkungan Sosial. *Cendrawasih Journal of Counseling and Education*. 2(1): 1-5.

- Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. 2018. *Fundamentals of Differential Equations*. Edisi 9. Boston, MA: Pearson.
- Nuraeni, Zuli. 2017. Aplikasi Persamaan Diferensial dalam Estimasi Jumlah Populasi. *Delta Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*. 5(1): 1-8.
- Obasuyi, Folorunso O. T. 2020. Modelling Dropout Crisis in Education Distribution for Developing Economies with Replicative 'SIR' Model. *Educational Thought*. 10(1): 1-20.
- Peraturan Bupati Rembang Nomor 20. 2023. *Peraturan Bupati Rembang Nomor 20 Tahun 2023 tentang Penanganan Anak Tidak Sekolah*. Diunduh di <https://jdih.rembangkab.go.id/inventarisasi-hukum/detail/perbup-20-tahun-2023/> tanggal 28 Maret 2024.
- Peraturan Pemerintah Nomor 47. 2008. *Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomor 47 Tahun 2008 tentang Wajib Belajar*. Diunduh di <https://bphn.go.id/data/documents/08pp047.pdf>/ tanggal 7 Oktober 2024.
- Perko, L. 2000. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Edisi 3. New York: Springer-Verlag.
- Putri, Adel A. 2023. *Anggaran Pendidikan Tinggi, Namun Angka Putus Sekolah Justru Meningkat*. Diakses di <https://tinyurl.com/anggaran-pendidikan/> tanggal 21 September 2024.
- Rahardja, U., & Sudaryono. 2024. *Aljabar Linear*. Jakart: Asosiasi Pendidikan Tinggi Informatika dan Komputer (APTIKOM).

- Rahmasari, I. P., Santoso, R. S., & Kismartini. 2023. Implementasi Program GASPOL 12 Tahun (Gerakan Ayo Sekolah POL 12 Tahun) Dalam Meningkatkan Kualitas Pendidikan Kabupaten Rembang. *Journal of Public Policy and Management Review*. 13(3): 1-12.
- Ramadhan, dkk. 2018. Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Strategi DOTS. *UNNES Journal of Mathematics*. 7(2): 1-12.
- Ross, S. L. 1989. *Introduction to Ordinary Differential Equations*. Edisi 4. New York, NY: John Wiley & Sons.
- Shadiq, Fajar. 2004. *Pemecahan Masalah, Penalaran dan Komunikasi*. Yogyakarta: Departemen Pendidikan Nasional, 2004.
- Strogatz, Steven H. 2015. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Edisi 2. New York: Taylor & Francis.
- Susanto, A. 2012. Kestabilan Global Titik Ekuilibrium Model Dasar Infeksi Virus Untuk Hepatitis B. *Jurnal Sainstek*. 4(1): 1-10.
- Tenenbaum, M. & Pollard, H. 1963. *Ordinary Differential Equations: An Elementary Textbook for Students of Mathematics, Engineering, and the Sciences*. New York: Dover.
- Verhulst, F. 1990. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer.
- Wahyuni, T., Prihandono, B., & Kusumastuti, N. 2015. Pemodelan Matematika dan Analisis Stabilitas dari Penularan Penyakit Gonore. *Bimaster*. 4(1): 1-10.

- Wardatusshopa, F., dkk. 2024. Keutaman Ilmu dalam Perspektif Hadits. *Mimbar Kampus*. 23(1): 1-10.
- Widiasanti, I., dkk. 2023. Ancaman Melawan Putus Sekolah Dengan Dilema Kualitas Pendidikan Indonesia. *Jurnal Ilmu Sosial dan Pendidikan*. 7(3): 1-9.
- Widowati & Sutimin. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: UNDIP.
- Wiggins, S. 2000. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Edisi 2. New York: Springer.
- Wijoyo, H., dkk. 2021. The Role of Regular Tax Functions in the Pandemic Period Covid-19 at Pekanbaru. *Terapan Informatika Nusantara*. 1(10):1-4.
- Yaneri, Ahmad, dkk. 2022. Analisis Penyebab Anak Putus Sekolah Bagi Keluarga Miskin. *LINDAYASOS*. 4(1): 1-14.

Lampiran 1. Perhitungan Nilai Eigen Secara Manual Dan Menggunakan Bantuan MATLAB 2013a Pada Persamaan (4.39)

Diketahui $(-\mu - \lambda)^2 \left[\lambda^2 + \lambda \left[(\mu + \omega) + (\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) \right] + (\mu + \omega)(\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) (\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega \right] = 0$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} (-\mu - \lambda)(-\mu - \lambda) &= 0 \\ \iff (-\mu - \lambda) &= 0 \quad \text{atau} \quad (-\mu - \lambda) = 0 \\ \iff \lambda_1 &= -\mu \quad \text{atau} \quad \lambda_2 = -\mu \\ \iff \lambda_1 &= -0,3 \quad \text{atau} \quad \lambda_2 = -0,3 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda \left[(\mu + \omega) + (\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) \right] + (\mu + \omega)(\delta + \mu) - \beta \left(\frac{b}{\mu} \right) (\delta + \mu) - (1 - q)\delta\omega &= 0 \\ \iff \lambda^2 + \lambda \left[(0,3 + 0,35) + (0,4 + 0,3) - (0,0001) \left(\frac{500}{0,3} \right) \right] + (0,3 + 0,35)(0,4 + & \\ 0,3) - (0,0001) \left(\frac{500}{0,3} \right) (0,4 + 0,3) - (1 - 0,65)(0,4)(0,35) &= 0 \\ \iff \lambda^2 + (1,183333)\lambda + 0,289333 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan bantuan *software* MATLAB R2013a diperoleh nilai eigen untuk λ_3 dan λ_4 yaitu

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= -0,3452 \\ \lambda_4 &= -0,8381 \end{aligned}$$

Lampiran 2. Script MATLAB Simulasi Numerik Kondisi Bebas Anak Putus Sekolah Dengan Nilai $\beta = 0,0001$

```

clear all;
clc;
close all;

% Parameter
b = 500;
beta = 0.0001;
omega = 0.35;
delta = 0.4;
q = 0.65;
mu = 0.3;

% Perhitungan R0
R_0 = (beta * b) / (mu * (mu + omega));
fprintf('Nilai R_0: %.2f\n', R_0);

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 100;
dt = 0.01;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);

% Kondisi Awal
S0 = 114230;
I0 = 500;
G0 = 500;
R0 = 326;
x = [S0; I0; G0; R0];

% Sistem
f = @(t, x) [
    b - beta * x(1) * x(2) - mu * x(1); % dS/dt
    beta * x(1) * x(2) + (1 - q) * delta * x(3) - (mu + omega) *
    x(2); % dI/dt

```



```

    omega * x(2) - (delta + mu) * x(3); % dG/dt
    q * delta * x(3) - mu * x(4) % dR/dt
];

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 4);
results(1, :) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi SIGR:\n');
fprintf('Waktu\t\tS \t\tI \t\tG \t\tR \n');

% Kondisi awal dicetak sebelum loop
fprintf('%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\n', t(1), x(1),
x(2), x(3), x(4));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1, :) = x';

    % Menampilkan hasil setiap langkah waktu (tiap 10 unit waktu)
    if mod(t(i+1),1) == 0 % Tampilkan setiap 1 unit waktu
        fprintf('Waktu: %.3f, S: %.3f, I: %.3f, G:
            %.3f, R: %.3f\n', t(i+1), x(1), x(2), x(3), x(4));
    end
end

% Menyimpan hasil ke file CSV
fprintf('Waktu Akhir: %.3f\n', t(end));

% Grafik Dinamika Model SIGR
figure;
plot(t, results(:, 1), 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'S (Rentan)');
hold on;

```

```

plot(t, results(:, 2), 'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'I (Anak Putus Sekolah)');
plot(t, results(:, 3), 'g', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'G (Mendapat Program GASPOL 12)');
plot(t, results(:, 4), 'm', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'R (Kembali Bersekolah)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Dinamika Model Anak Putus Sekolah Dengan Program GASPOL
12 ( $R_0 < 1$ , Stabil)');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Setiap Kompartemen
figure;
plot(t, results(:, 1), 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi S (Rentan)');
title('Dinamika Populasi Rentan (S)');
grid on;

figure;
plot(t, results(:, 2), 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi I (Terinfeksi APS)');
title('Dinamika Populasi Anak Putus Sekolah (I)');
grid on;

figure;
plot(t, results(:, 3), 'g', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi G (Mendapatkan Program GASPOL 12)');
title('Dinamika Populasi Mendapatkan Program GASPOL 12 (G)');
grid on;

figure;
plot(t, results(:, 4), 'm', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi R (Kembali Bersekolah)');
title('Dinamika Populasi Kembali Bersekolah (R)');
grid on;

```

```
% Menampilkan tabel hasil akhir
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');
fprintf('Populasi Rentan (S): %.2f\n', results(end, 1));
fprintf('Populasi APS (I): %.2f\n', results(end, 2));
fprintf('Populasi GASPOL 12 (G): %.2f\n', results(end, 3));
fprintf('Populasi Sekolah (R): %.2f\n', results(end, 4));
```

Lampiran 3. Perhitungan Bilangan Reproduksi Dasar Dan Titik Ekuilibrium Dengan Beberapa Nilai β Yang Berbeda ($\beta = 0,0001; 0,00015; 0,0002; 0,0003$) Menggunakan Bantuan MATLAB 2013a

```
clear all;
clc;
close all;

% Parameter
b = 500;
beta = 0.0003;
% Nilai beta bisa diubah [0.0001, 0.00015, 0.0002, 0.0003]
omega = 0.35;
delta = 0.4;
q = 0.65;
mu = 0.3;

% Perhitungan R0
R_0 = (beta * b) / (mu * (mu + omega));
fprintf('Nilai R_0: %.2f\n', R_0);

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 185;
dt = 0.01;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);

% Kondisi Awal
S0 = 114230;
I0 = 500;
G0 = 500;
R0 = 326;
x = [S0; I0; G0; R0];

% Sistem
```

```

f = @(t, x) [
    b - beta * x(1) * x(2) - mu * x(1); % dS/dt
    beta * x(1) * x(2) + (1 - q) * delta * x(3) - (mu + omega)
    * x(2); % dI/dt
    omega * x(2) - (delta + mu) * x(3); % dG/dt
    q * delta * x(3) - mu * x(4) % dR/dt
];

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 4);
results(1, :) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi SIGR:\n');
fprintf('Waktu\t\tS \t\tI \t\tG \t\tR \n');

% Kondisi awal dicetak sebelum loop
fprintf('%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\n', t(1), x(1),
x(2), x(3), x(4));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1, :) = x';

    % Menampilkan hasil setiap langkah waktu (tiap 10 unit waktu)
    if mod(t(i+1),1) == 0 % Tampilkan setiap 1 unit waktu
        fprintf('Waktu: %.3f, S: %.3f, I: %.3f, G: %.3f, R:
        %.3f\n', t(i+1), x(1), x(2), x(3), x(4));
    end
end

% Menyimpan hasil ke file CSV
fprintf('Waktu Akhir: %.3f\n', t(end));

% Grafik Dinamika Model SIGR

```

```

figure;
plot(t, results(:, 1), 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'S (Rentan)');
hold on;
plot(t, results(:, 2), 'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'I (Anak Putus Sekolah)');
plot(t, results(:, 3), 'g', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'G (Mendapat Program GASPOL 12)');
plot(t, results(:, 4), 'm', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'R (Kembali Bersekolah)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Dinamika Model Anak Putus Sekolah Dengan Program GASPOL
12 ( $R_0 < 1$ , Stabil)');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Setiap Kompartemen
figure;
plot(t, results(:, 1), 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi S (Rentan)');
title('Dinamika Populasi Rentan (S)');
grid on;

figure;
plot(t, results(:, 2), 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi I (Terinfeksi APS)');
title('Dinamika Populasi Anak Putus Sekolah (I)');
grid on;

figure;
plot(t, results(:, 3), 'g', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi G (Mendapatkan Program GASPOL 12)');
title('Dinamika Populasi Mendapatkan Program GASPOL 12 (G)');
grid on;

figure;
plot(t, results(:, 4), 'm', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');

```

```
ylabel('Populasi R (Kembali Bersekolah)');  
title('Dinamika Populasi Kembali Bersekolah (R)');  
grid on;  
  
% Menampilkan tabel hasil akhir  
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');  
fprintf('Populasi Rentan (S): %.2f\n', results(end, 1));  
fprintf('Populasi APS (I): %.2f\n', results(end, 2));  
fprintf('Populasi GASPOL 12 (G): %.2f\n', results(end, 3));  
fprintf('Populasi Sekolah (R): %.2f\n', results(end, 4));
```

Lampiran 4. Script MATLAB Simulasi Titik Ekuilibrium Bebas Anak Putus Sekolah dengan Berbagai Nilai β

```

clc; clear; close all;

% Parameter Model
b = 500;
beta_values = [0.0001, 0.00015, 0.0002, 0.0003]; % 4 nilai beta
omega = 0.35;
delta = 0.4;
q = 0.65;
mu = 0.3;

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 185;
dt = 0.01;
t = t_start:dt:t_end;
N = length(t);

% Kondisi Awal
x0 = [114230; 500; 500; 326]; % [S0, I0, G0, R0]
colors = ['r', 'g', 'b', 'k']; % Warna tetap

% Plot konfigurasi
figure(1); hold on; xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('Populasi S(t)'); title('Dinamika S(t)'); grid on;
figure(2); hold on; xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('Populasi I(t)'); title('Dinamika I(t)'); grid on;
figure(3); hold on; xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('Populasi G(t)'); title('Dinamika G(t)'); grid on;
figure(4); hold on; xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('Populasi R(t)'); title('Dinamika R(t)'); grid on;

% Simulasi untuk setiap nilai beta
for k = 1:length(beta_values)
    beta = beta_values(k);

    % Inisialisasi Variabel

```



```

X = zeros(4, N);
X(:,1) = x0;

% Sistem
f = @(x) [
    b - beta*x(1)*x(2) - mu*x(1);           % dS/dt
    beta*x(1)*x(2) + (1 - q)*delta*x(3) - (mu + omega)*x(2);
    % dI/dt
    omega*x(2) - (delta + mu)*x(3);         % dG/dt
    q*delta*x(3) - mu*x(4)                 % dR/dt
];

% Iterasi RK4 menggunakan vektor
for j = 1:N-1
    k1 = dt * f(X(:,j));
    k2 = dt * f(X(:,j) + 0.5*k1);
    k3 = dt * f(X(:,j) + 0.5*k2);
    k4 = dt * f(X(:,j) + k3);

    X(:,j+1) = X(:,j) + (1/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
end

% Plot hasil dengan warna tetap ['r', 'g', 'b', 'k']
figure(1); plot(t, X(1,:), 'Color', colors(k), 'LineWidth',
2, 'DisplayName', ['\beta=', num2str(beta)]);
figure(2); plot(t, X(2,:), 'Color', colors(k), 'LineWidth',
2, 'DisplayName', ['\beta=', num2str(beta)]);
figure(3); plot(t, X(3,:), 'Color', colors(k), 'LineWidth',
2, 'DisplayName', ['\beta=', num2str(beta)]);
figure(4); plot(t, X(4,:), 'Color', colors(k), 'LineWidth',
2, 'DisplayName', ['\beta=', num2str(beta)]);
end

% Tambahkan legenda
figure(1); legend show;
figure(2); legend show;
figure(3); legend show;
figure(4); legend show;

```

Lampiran 5. Perhitungan Titik Ekuilibrium Pada $\beta = 0,00035$

Misalkan diambil $\beta = 0,00035$; $b = 500$; $\omega = 0,35$; $\delta = 0,4$; $q = 0,65$ dan $\mu = 0,3$, maka nilai-nilai ini dapat disubstitusikan ke dalam sistem (4.5) sehingga diperoleh

$$\begin{cases} 0 = 500 - (0,00035)SI - (0,3)S \\ 0 = (0,00035)SI + (0,14)G - (0,65)I \\ 0 = (0,35)I - (0,7)G \\ 0 = (0,26)G - (0,3)R \end{cases} \quad (5.1)$$

Dari sistem di atas diperoleh:

1. Persamaan pertama

$$\begin{aligned} 500 - (0,00035)SI - (0,3)S &= 0 \\ \iff 500 &= (0,00035)SI + (0,3)S \\ \iff 500 &= ((0,00035)I + (0,3))S \\ \iff \frac{500}{((0,00035)I + (0,3))} &= S \end{aligned}$$

2. Persamaan kedua

$$\begin{aligned} (0,35)I - (0,7)G &= 0 \\ \iff (0,35)I &= (0,7)G \\ \iff \frac{(0,35)}{(0,7)}I &= G \\ \iff (0,5)I &= G \end{aligned}$$

3. Persamaan ketiga

$$\begin{aligned} (0,26)G - (0,3)R &= 0 \\ \iff (0,26)G &= (0,3)R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \frac{(0,26)}{(0,3)}G = R \\
&\Longleftrightarrow \frac{(0,26)(0,5)}{(0,3)}I = R \\
&\Longleftrightarrow (0,13)I = R
\end{aligned}$$

4. Persamaan keempat

$$\begin{aligned}
&(0,00035)SI + (0,14)G - (0,65)I = 0 \\
&\Longleftrightarrow (0,00035)\frac{500}{((0,00035)I+(0,3))}I + (0,14)(0,5)I - (0,65)I = 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{0,175}{((0,00035)I+(0,3))}I + 0,07I - 0,65I = 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{0,175}{((0,00035)I+(0,3))}I - 0,58I = 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{(0,175)I - (0,58)I((0,00035)I+(0,3))}{((0,00035)I+(0,3))} = 0 \\
&\Longleftrightarrow (0,175)I - (0,175)I - (0,000203)I^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow (0,001)I - (0,000203)I^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow I((0,001) - (0,000203)I) = 0
\end{aligned}$$

Jadi, $I^0 = 0$ atau $((0,001) - (0,000203)I^*) = 0$. Sehingga nilai I ada dua yaitu $I^0 = 0$ atau $I^* = \frac{(0,001)}{(0,000203)} \approx 4,93$.

Untuk nilai $I^0 = 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
S^0 &= \frac{500}{((0,00035)I^0+(0,3))} \\
&\Longleftrightarrow = \frac{500}{((0,00035)(0)+(0,3))} \\
&\Longleftrightarrow = \frac{500}{0,3} \\
&\Longleftrightarrow = 1666,67
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^0 &= 0,5I^0 \\
&\Longleftrightarrow = (0,5)(0) \\
&\Longleftrightarrow = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^0 &= (0,13)I^0 \\
&\Longleftrightarrow = (0,13)(0) \\
&\Longleftrightarrow = 0
\end{aligned}$$

sehingga titik ekuilibrium $E^0 = (1666,67; 0; 0; 0)$.

Sedangkan untuk nilai $I^* \approx 4,93$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 S^* &= \frac{500}{((0,00035)I^* + (0,3))} \\
 \Longleftrightarrow &= \frac{500}{((0,00035)(4,93) + (0,3))} \\
 \Longleftrightarrow &= \frac{500}{0,03017255} \\
 \Longleftrightarrow &\approx 1657,14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G^* &= (0,5)I^* \\
 \Longleftrightarrow &= (0,5)(4,93) \\
 \Longleftrightarrow &\approx 2,46
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R^* &= (0,13)I^* \\
 \Longleftrightarrow &= (0,13)(4,93) \\
 \Longleftrightarrow &\approx 2,13
 \end{aligned}$$

sehingga titik ekuilibrium $E^* = (1657,14; 4,93; 2,46; 2,13)$.

Lampiran 6. Untuk Nilai Parameter $\beta = 0,00035$ Diperoleh Dua kondisi I , Salah Satunya Adalah $I^0 = 0$ Yang Menghasilkan Titik Ekuilibrium Bebas Anak Putus Sekolah $E^0 = (1666,67; 0; 0; 0)$. Perhitungan Nilai Eigen Dilakukan Dengan Bantuan Maple 11

*Dalam penggunaan Maple, variabel I diganti dengan V karena I secara otomatis dianggap sebagai satuan bilangan imajiner.

```
> b := 500; beta := 0.00035; omega := 0.35;
delta := 0.4; q := 0.65; mu := 0.3;
      500
      0.00035
      0.35
      0.4
      0.65
      0.3
> p1 := b-beta*S*V-mu*S;
      500 - 0.00035 S V - 0.3 S
> p2 := beta*S*V+(1-q)*delta*G-(mu+omega)*V;
      0.00035 S V + 0.140 G - 0.65 V
> p3 := omega*V-(delta+mu)*G;
      0.35 V - 0.7 G
> p4 := q*delta*G-mu*R;
      0.260 G - 0.3 R
> solve({p3, p4, p1, p2}, {G, S, V, R});
      {V = 0., R = 0., G = 0., S = 1666.666667},
      {G = 2.463054187, V = 4.926108374,
      R = 2.134646962, S = 1657.142857}
> with(Student[MultivariateCalculus]);
> J := Jacobian([p1, p2, p3, p4], [S, V, G, R])
```

```
> q1 := Jacobian([p1, p2, p3, p4], [S, V, G, R] =  
[1666.666667, 0, 0, 0])  
> with(LinearAlgebra):  
> evalsA := Eigenvalues(q1)
```

Lampiran 7. Untuk Nilai Parameter $\beta = 0,00035$ Diperoleh Dua kondisi I , Salah Satunya Adalah $I^* = 4,93$ Yang Menghasilkan Titik Ekuilibrium Bebas Anak Putus Sekolah $E_1 = (1657, 14; 4, 93; 2, 46; 2, 13)$. Perhitungan Nilai Eigen Dilakukan Dengan Bantuan Maple 11

*Dalam penggunaan Maple, variabel I diganti dengan V karena I secara otomatis dianggap sebagai satuan bilangan imajiner.

```
> b := 500; beta := 0.00035; omega := 0.35;
delta := 0.4; q := 0.65; mu := 0.3;
      500
      0.00035
      0.35
      0.4
      0.65
      0.3
> p1 := b-beta*S*V-mu*S;
      500 - 0.00035 S V - 0.3 S
> p2 := beta*S*V+(1-q)*delta*G-(mu+omega)*V;
      0.00035 S V + 0.140 G - 0.65 V
> p3 := omega*V-(delta+mu)*G;
      0.35 V - 0.7 G
> p4 := q*delta*G-mu*R;
      0.260 G - 0.3 R
> solve({p3, p4, p1, p2}, {G, S, V, R});
      {V = 0., R = 0., G = 0., S = 1666.666667},
      {G = 2.463054187, V = 4.926108374,
      R = 2.134646962, S = 1657.142857}
> with(Student[MultivariateCalculus])
```

```
> J := Jacobian([p1, p2, p3, p4], [S, V, G, R])
> q1 := Jacobian([p1, p2, p3, p4], [S, V, G, R] =
  [1657.142857, 4.926108374, 2.463054187,
  2.134646962])
> with(LinearAlgebra):
> evalsA := Eigenvalues(q1)
```


Lampiran 8. Script Maple Perhitungan Titik Ekuilibrium Dan Nilai Eigen Untuk Berbagai Nilai β

*Dalam penggunaan Maple, variabel I diganti dengan V karena I secara otomatis dianggap sebagai satuan bilangan imajiner.

Perubahan pada Tabel (4.10) dilakukan dengan menggunakan satu sistem otonomus yang sama. Variasi dilakukan pada parameter β dalam rentan tertentu yaitu $\beta = 0,00036$ hingga $\beta = 0,00038$. Setiap perubahan nilai β menghasilkan titik-titik ekuilibrium yang berbeda. Selanjutnya, berdasarkan titik-titik ekuilibrium tersebut nilai eigen dihitung untuk menentukan kestabilan sistem. Seluruh proses perhitungan ini dilakukan menggunakan bantuan *software* Maple.

```
> b := 500; beta := 0.00036; omega := 0.35;
delta := 0.4; q := 0.65; mu := 0.3;
                                0.00036
                                0.35
                                0.4
                                0.65
                                0.3
> p1 := b-beta*S*V-mu*S;
                                500 - 0.00036 S V - 0.3 S
> p2 := beta*S*V+(1-q)*delta*G-(mu+omega)*V;
                                0.00036 S V + 0.140 G - 0.65 V
> p3 := omega*V-(delta+mu)*G;
                                0.35 V - 0.7 G
> p4 := q*delta*G-mu*R;
                                0.260 G - 0.3 R
```

```

> solve({p2, p4, p1, p3}, {S, V, G, R});
{V = 0., G = 0., R = 0., S = 1666.666667},
{S = 1611.111111, V = 28.73563218, R = 12.45210728,
 G = 14.36781609}
> with(Student[MultivariateCalculus])
> J := Jacobian([p1, p2, p3, p4], [S, V, G, R])
> q1 := Jacobian([p1, p2, p3, p4], [S, V, G, R] =
      [1666.666667, 0, 0, 0])
> with(LinearAlgebra):
> evalsA := Eigenvalues(q1)

```

Lampiran 9. Perhitungan Nilai Eigen Secara Manual Dan Menggunakan Bantuan MATLAB 2013a Pada Persamaan (4.41)

Diketahui

$$(-\mu - \lambda) \left(\lambda^3 + \left[-\frac{A}{\delta + \mu} + (\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} + (\delta + \mu) \right] \lambda^2 + \left[-A - \beta b - (1 - q)\delta\omega + \frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A} + (\mu + \omega)(\delta\mu) + \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A}(\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta + \mu) - A\mu}{\delta + \mu} \right] \lambda + \left[\frac{\beta b(\delta + \mu)^2(\mu + \omega)}{A} - \frac{\beta b(\delta + \mu)(1 - q)\delta\omega}{A} - A\mu \right] \right) = 0$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} (-\mu - \lambda) &= 0 \\ \iff \lambda_1 &= -\mu \\ \iff \lambda_1 &= -0,3 \end{aligned}$$

atau

$$\lambda^3 + \left[-\frac{A}{\delta + \mu} + (\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A} + (\delta + \mu) \right] \lambda^2 + \left[-A - \beta b - (1 - q)\delta\omega + \frac{\beta b(\delta + \mu)^2}{A} + (\mu + \omega)(\delta\mu) + \frac{\beta b(\delta + \mu)}{A}(\mu + \omega) + \frac{\beta b(\delta + \mu) - A\mu}{\delta + \mu} \right] \lambda + \left[\frac{\beta b(\delta + \mu)^2(\mu + \omega)}{A} - \frac{\beta b(\delta + \mu)(1 - q)\delta\omega}{A} - A\mu \right] = 0$$

Diketahui bahwa

$$A = \delta\omega q + \delta\mu + \mu^2 + \omega\mu$$

$$\iff = (0,4)(0,35)(0,65) + (0,4)(0,3) + (0,3)^2 + (0,35)(0,3)$$

$$\iff = 0,406$$

Sehingga

$$\lambda^3 + \left[-\frac{0,406}{(0,4)+(0,3)} + ((0,3)+(0,35)) + \frac{(0,0005)(500)((0,4)+(0,3))}{0,406} + ((0,4)+(0,3)) \right] \lambda^2 + \left[-0,406 - (0,0005)(500) - (1 - (0,65))(0,4)(0,35) + \frac{(0,0005)(500)((0,4)+(0,3))^2}{0,406} + \right]$$

$$\begin{aligned}
& ((0, 3) + (0, 35))((0, 4)(0, 3)) + \frac{(0,0005)(500)((0,4)+(0,3))}{0,406}((0, 3) + (0, 35)) + \\
& \frac{(0,0005)(500)((0,4)+(0,3))-(0,406)(0,3)}{(0,4)+(0,3)} \Bigg] \lambda + \left[\frac{(0,0005)(500)((0,4)+(0,3))^2((0,3)+(0,35))}{0,406} - \right. \\
& \left. \frac{(0,0005)(500)((0,4)+(0,3))(1-(0,65))(0,4)(0,35)}{0,406} - (0,406)(0,3) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\lambda^3 + 1,201034\lambda^2 + 0,407897\lambda + 0,0532 = 0$$

Dengan menggunakan bantuan software MATLAB R2013a diperoleh nilai λ_2 , λ_3 dan λ_4 , yaitu

$$\lambda_2 = -0,7533 + 0,0000i$$

$$\lambda_3 = -0,2239 + 0,1432i$$

$$\lambda_4 = -0,2239 - 0,1432i$$

Lampiran 10. Script MATLAB Simulasi Numerik Kondisi Endemik Anak Putus Sekolah Dengan Nilai $\beta = 0,0005$

```

clear all;
clc;
close all;

% Parameter
b = 500;
beta = 0.0005;
omega = 0.35;
delta = 0.4;
q = 0.65;
mu = 0.3;

% Perhitungan R0
R_0 = (beta * b) / (mu * (mu + omega));
fprintf('Nilai R_0: %.2f\n', R_0);

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 100;
dt = 0.01;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);

% Kondisi Awal
S0 = 114230;
I0 = 500;
G0 = 500;
R0 = 326;
x = [S0; I0; G0; R0];

% Sistem
f = @(t, x) [
    b - beta * x(1) * x(2) - mu * x(1); % dS/dt
    beta * x(1) * x(2) + (1 - q) * delta * x(3) - (mu + omega) * x(2); % dI/dt
    omega * x(2) - (delta + mu) * x(3); % dG/dt

```

```

    q * delta * x(3) - mu * x(4) % dR/dt
];

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 4);
results(1, :) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi SIGR (R0 > 1):\n');
fprintf('Waktu\t\tS (Rentan)\t\tI (APS)\t\tG (GAPOL 12)\t\tR (Bersekolah)\n');
fprintf('%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\n', t(1), x(1), x(2), x(3), x(4));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1, :) = x';

    % Menampilkan hasil setiap langkah waktu (tiap 10 unit waktu)
    if mod(t(i+1), 1) == 0
        fprintf('%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\n', t(i+1), x(1), x(2), x(3), x(4));
    end
end

% Menyimpan hasil ke file CSV
filename = 'sigr_simulation_high_IG.csv';
csvwrite(filename, [t' results]);
fprintf('\nHasil simulasi disimpan ke file: %s\n', filename);

% Grafik Dinamika Model SIGR
figure;
plot(t, results(:, 1), 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'S (Rentan)');
hold on;

```

```

plot(t, results(:, 2), 'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'I (Infeksi APS)');
plot(t, results(:, 3), 'g', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'G (GASPOL 12)');
plot(t, results(:, 4), 'm', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'R (Kembali Bersekolah)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Dinamika Model Anak Putus Sekolah Dengan Program GASPOL
12 ( $R_0 > 1$ , Stabil)');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Setiap Subpopulasi
figure;
plot(t, results(:, 1), 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi S (Rentan)');
title('Dinamika Populasi Rentan (S)');
grid on;

figure;
plot(t, results(:, 2), 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi I (Terinfeksi APS)');
title('Dinamika Populasi Anak Putus Sekolah (I)');
grid on;

figure;
plot(t, results(:, 3), 'g', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi G (Mendapatkan Program GASPOL 12)');
title('Dinamika Populasi Mendapatkan Program GASPOL 12 (G)');
grid on;

figure;
plot(t, results(:, 4), 'm', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi R (Kembali Bersekolah)');
title('Dinamika Populasi Kembali Bersekolah(R)');
grid on;

```

```
% Menampilkan tabel hasil akhir
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');
fprintf('Populasi Rentan (S): %.2f\n', results(end, 1));
fprintf('Populasi Anak Putus Sekolah (I): %.2f\n', results(end,
2));
fprintf('Populasi GASPOL 12 (G): %.2f\n', results(end, 3));
fprintf('Populasi Kembali Bersekolah (R): %.2f\n', results(end,
4));
```


Lampiran 11. Perhitungan Bilangan Reproduksi Dasar Dan Titik Ekuilibrium Dengan Berbagai Nilai β Yang Berbeda ($\beta = 0,0004; 0,0005; 0,0006; 0,0007$) Menggunakan Bantuan MATLAB 2013a

```
clear all;
clc;
close all;

% Parameter
b = 500;
beta = 0.0004;
omega = 0.35;
delta = 0.4;
q = 0.65;
mu = 0.3;

% Perhitungan R0
R_0 = (beta * b) / (mu * (mu + omega));
fprintf('Nilai R_0: %.2f\n', R_0);

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 140;
dt = 0.01;
num_steps = round((t_end - t_start) / dt) + 1;
t = linspace(t_start, t_end, num_steps);

% Kondisi Awal
S0 = 114230;
I0 = 500;
G0 = 500;
R0 = 326;
x = [S0; I0; G0; R0];

% Sistem
f = @(t, x) [
    b - beta * x(1) * x(2) - mu * x(1); % dS/dt
```

```

    beta * x(1) * x(2) + (1 - q) * delta * x(3) - (mu + omega) *
    x(2); % dI/dt
    omega * x(2) - (delta + mu) * x(3); % dG/dt
    q * delta * x(3) - mu * x(4) % dR/dt
];

% Menyimpan hasil simulasi
results = zeros(num_steps, 4);
results(1, :) = x';

% Header output tabel
fprintf('\nSimulasi SIGR (R0 > 1):\n');
fprintf('Waktu\t\tS (Rentan)\t\tI (APS)\t\tG (GAPOL 12)\t\tR
(Bersekolah)\n');
fprintf('%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\n', t(1), x(1),
x(2), x(3), x(4));

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:num_steps-1
    k1 = f(t(i), x);
    k2 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k1);
    k3 = f(t(i) + dt/2, x + dt/2 * k2);
    k4 = f(t(i) + dt, x + dt * k3);

    % Update nilai x
    x = x + (dt/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    results(i+1, :) = x';

    % Menampilkan hasil setiap langkah waktu (tiap 10 unit waktu)
    if mod(t(i+1), 1) == 0
        fprintf('%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\t\t%.2f\n', t(i+1),
            x(1), x(2), x(3), x(4));
    end
end

% Menyimpan hasil ke file CSV
filename = 'sigr_simulation_high_IG.csv';
csvwrite(filename, [t' results]);
fprintf('\nHasil simulasi disimpan ke file: %s\n', filename);

% Grafik Dinamika Model SIGR
figure;
```

```

plot(t, results(:, 1), 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'S (Rentan)');
hold on;
plot(t, results(:, 2), 'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'I (Infeksi APS)');
plot(t, results(:, 3), 'g', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'G (GASPOL 12)');
plot(t, results(:, 4), 'm', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'R (Kembali Bersekolah)');
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi');
title('Dinamika Model Anak Putus Sekolah Dengan Program GASPOL
12 ( $R_0 > 1$ , Stabil)');
legend('show');
grid on;

% Grafik Terpisah untuk Setiap Subpopulasi
figure;
plot(t, results(:, 1), 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi S (Rentan)');
title('Dinamika Populasi Rentan (S)');
grid on;

figure;
plot(t, results(:, 2), 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi I (Terinfeksi APS)');
title('Dinamika Populasi Anak Putus Sekolah (I)');
grid on;

figure;
plot(t, results(:, 3), 'g', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi G (Mendapatkan Program GASPOL 12)');
title('Dinamika Populasi Mendapatkan Program GASPOL 12 (G)');
grid on;

figure;
plot(t, results(:, 4), 'm', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('Populasi R (Kembali Bersekolah)');

```

```
title('Dinamika Populasi Kembali Bersekolah(R)');  
grid on;  
  
% Menampilkan tabel hasil akhir  
fprintf('\nHasil Akhir Simulasi:\n');  
fprintf('Populasi Rentan (S): %.2f\n', results(end, 1));  
fprintf('Populasi Anak Putus Sekolah (I): %.2f\n', results(end,  
2));  
fprintf('Populasi GASPOL 12 (G): %.2f\n', results(end, 3));  
fprintf('Populasi Kembali Bersekolah (R): %.2f\n', results(end,  
4));
```

Lampiran 12. Script MATLAB Simulasi Titik Ekuilibrium Endemik Anak Putus Sekolah Dengan Berbagai Nilai β

```

clc; clear; close all;

% Parameter Model
b = 500;
beta_values = [0.0004, 0.00005, 0.0006, 0.0007]; % 4 nilai beta
omega = 0.35;
delta = 0.4;
q = 0.65;
mu = 0.3;

% Waktu Simulasi
t_start = 0;
t_end = 140;
dt = 0.01;
t = t_start:dt:t_end;
N = length(t);

% Kondisi Awal
x0 = [114230; 500; 500; 326]; % [S0, I0, G0, R0]
colors = ['r', 'g', 'b', 'k']; % Warna tetap

% Plot konfigurasi
figure(1); hold on; xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('Populasi S(t)'); title('Dinamika S(t)'); grid on;
figure(2); hold on; xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('Populasi I(t)'); title('Dinamika I(t)'); grid on;
figure(3); hold on; xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('Populasi G(t)'); title('Dinamika G(t)'); grid on;
figure(4); hold on; xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('Populasi R(t)'); title('Dinamika R(t)'); grid on;

% Simulasi untuk setiap nilai beta
for k = 1:length(beta_values)
    beta = beta_values(k);

    % Inisialisasi Variabel

```

```

X = zeros(4, N);
X(:,1) = x0;

% Sistem
f = @(x) [
    b - beta*x(1)*x(2) - mu*x(1);           % dS/dt
    beta*x(1)*x(2) + (1 - q)*delta*x(3) - (mu + omega)*x(2);
    % dI/dt
    omega*x(2) - (delta + mu)*x(3);         % dG/dt
    q*delta*x(3) - mu*x(4)                 % dR/dt
];

% Iterasi RK4 menggunakan vektor
for j = 1:N-1
    k1 = dt * f(X(:,j));
    k2 = dt * f(X(:,j) + 0.5*k1);
    k3 = dt * f(X(:,j) + 0.5*k2);
    k4 = dt * f(X(:,j) + k3);

    X(:,j+1) = X(:,j) + (1/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
end

% Plot hasil dengan warna tetap ['r', 'g', 'b', 'k']
figure(1); plot(t, X(1,:), 'Color', colors(k), 'LineWidth',
2, 'DisplayName', ['\beta=', num2str(beta)]);
figure(2); plot(t, X(2,:), 'Color', colors(k), 'LineWidth',
2, 'DisplayName', ['\beta=', num2str(beta)]);
figure(3); plot(t, X(3,:), 'Color', colors(k), 'LineWidth',
2, 'DisplayName', ['\beta=', num2str(beta)]);
figure(4); plot(t, X(4,:), 'Color', colors(k), 'LineWidth',
2, 'DisplayName', ['\beta=', num2str(beta)]);
end

% Tambahkan legenda
figure(1); legend show;
figure(2); legend show;
figure(3); legend show;
figure(4); legend show;

```

RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

1. Nama : Nila Fadlilatul Ilma
2. Tempat & Tgl. Lahir : Rembang, 27 Juni 2003
3. Alamat Rumah : Desa Megal, RT. 03/RW. 01,
Kec. Pamotan, Kab. Rembang,
Jawa Tengah
4. Hp : 083821166912
5. Email : nilailma814@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

1. Pendidikan Formal
 - a. SD Negeri Megal
 - b. SMP Negeri 2 Pamotan
 - c. SMA Negeri 1 Sulang

Semarang, 26 Mei 2025



Nila Fadlilatul Ilma

NIM : 2108046086