

REPRESENTASI LINIER CLOAKTIK MONOID ATAS ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika**



Oleh : ICHA AULIYA RIZQIYA
NIM : 2108046057

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025**

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Icha Auliya Rizqiya
NIM : 2108046057
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

REPRESENTASI LINIER CLOAKTIK MONOID ATAS ALJABAR MAX-PLUS

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 1 Juni 2025
Pembuat pernyataan,

Icha Auliya Rizqiya
NIM : 2108046057



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **REPRESENTASI LINIER CLOAKTIK MONOID ATAS
ALJABAR MAX-PLUS**

Penulis : Icha Auliya Rizqiya

NIM : 2108046057

Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji
Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima
sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu
Matematika.

Semarang, 16 Juni 2025

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Prihadi Kurniawan, M.Sc.

NIP : 199012262019031012

Penguji II,

Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.

NIP : 198201132011012009

Penguji III,

Nur Khasanah, M.Si.

NIP : 199111212019032017

Penguji IV,

Ariska Kurnia R., M.Sc.

NIP : 198908112019032019

Pembimbing I,

Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.

NIP : 198201132011012009



NOTA DINAS

Semarang, 1 Juni 2025

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

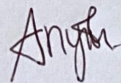
Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : REPRESENTASI LINIER CLOAKTIK MONOID ATAS
ALJABAR MAX-PLUS
Nama : Icha Auliya Rizqiya
NIM : 2108046057
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,



Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.
NIP : 198201132011012009

ABSTRAK

Penelitian ini mengkaji tentang representasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus. Cloaktik monoid merupakan himpunan kelas-kelas ekuivalen terhadap relasi ekuivalen $\equiv_{clk}$ terhadap operasi konkatenasi. Melalui konsep ini, dua *word* dikatakan ekuivalen jika memiliki panjang *subword* tidak menurun maksimum yang sama untuk semua subset *convex* pada *alphabet* terurut total. Sementara itu, aljabar max-plus adalah struktur aljabar yang dilengkapi dengan operasi $\oplus$ (maksimum) dan $\otimes$ (penjumlahan). Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendefinisikan cloaktik monoid atas aljabar max-plus serta mengkaji bagaimana cloaktik monoid dapat direpresentasikan secara linier melalui matriks-matriks dalam aljabar max-plus yang disebut matriks troplaktik. Penelitian ini dimulai dengan merepresentasikan setiap *letters* cloaktik monoid kedalam bentuk matriks troplaktik. Representasi linier didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang bersifat homomorfisma dari semigrup kedalam bentuk matriks aljabar max-plus. Dengan menggunakan relasi knuth ditunjukkan bahwa setiap elemen dalam cloaktik monoid dapat direpresentasikan melalui hasil kali matriks aljabar max-plus yang sesuai. Hasil utama dari penelitian ini adalah pembuktian bahwa pemetaan tersebut merupakan homomorfisma, sehingga secara formal merupakan representasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus.

Kata kunci : cloaktik monoid, aljabar max-plus, representasi linier, semigrup, homomorfisma.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kehadiran Allah SWT. Maha penyayang dan Maha pemberi nikmat sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **"Representasi Linier CloaktiK Monoid Atas Aljabar Max-Plus"**. Semoga sholawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Baginda Muhammad SAW., keluarga, sahabat, dan pengikutnya yang telah menyebarkan agama Islam di seluruh dunia. Penelitian Ini adalah salah satu syarat untuk menyelesaikan studi Sastra 1 (S1) di UIN Walisongo Semarang. Penulis telah berhasil menyelesaikan skripsi ini berkat doa dan bantuan moral dan materi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Nizar, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
2. Bapak Prof. Dr. H. Musahadi, M.Ag. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
3. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
4. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D. selaku dosen pembimbing yang senantiasa memberikan bimbingan, arahan serta masukan selama proses penyelesaian skripsi.
5. Bapak Agus Wayan Yulianto, M. Sc. selaku wali dosen yang telah mendampingi selama menempuh studi Sastra 1 (S1) di UIN Walisongo Semarang.

6. Bapak dan Ibu Dosen Prodi Matematika, terimakasih atas ilmu yang diberikan kepada penulis selama perkuliahan di Prodi Matematika UIN Walisongo Semarang.
7. Bapak Dokan dan Ibu Nor Syaidah selaku orang tua penulis, terimakasih atas doa, nasihat, motivasi serta dukungan secara finansial maupun non finansial. Terimakasih telah menjadi orang tua yang hebat bagi penulis khususnya ibu penulis.
8. Ahmad Fikru Roisman selaku kakak penulis, terimakasih atas dukungan secara finansial maupun non finansial sehingga penulis bisa menyelesaikan studi Sastra 1 (S1) di UIN Walisongo Semarang.
9. Kenzian Akhtar selaku keponakan penulis, terimakasih telah hadir mewarnai hidup penulis. Semoga kesuksesan selalu menyertai kita dalam dunia maupun akhirat.
10. Teman-teman seperjuangan mahasiswa Matematika angkatan 2021, khususnya teman-teman sekelas yang telah memberi dukungan dalam bentuk apapun.
11. *My best friend* Fila dan Siska, terimakasih telah menjadi teman terbaik selama penulis menempuh perkuliahan di UIN Walisongo Semarang.
12. *My special person* Ahmad Sukron, terima kasih atas kesabaran, semangat, dan dukunganmu yang tiada henti. Kehadiranmu telah menjadi penguat di setiap langkah, dan cinta serta doamu menjadi cahaya dalam proses panjang ini. Semoga setiap perjuangan kita membawa berkah dan masa depan yang lebih indah bersama.

13. Untuk diriku sendiri, terima kasih telah bertahan sejauh ini. Terima kasih sudah kuat meskipun sering merasa lelah, tetap melangkah walau banyak ragu, dan terus percaya meski sempat ingin menyerah. Perjalanan ini bukanlah hal yang mudah, tapi aku bangga karena tidak berhenti di tengah jalan.
14. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah berkontribusi dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari tanpa bantuan, dukungan, bimbingan, dan motivasi dari nama-nama diatas, penulis tidak mungkin menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Semarang, 1 Juni 2025

Icha Auliya Rizqiya

NIM: 2108046057

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA PEMBIMBING I	iv
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	x
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Tujuan Penelitian	3
C. Tinjauan Pustaka	3
D. Metodologi Penelitian	4
E. Sistematika Penelitian	5
BAB II LANDASAN TEORI	7
A. Semigrup	7
B. Aljabar Max-Plus	11
C. Relasi Knuth	19
BAB III REPRESENTASI CLOAKTIK MONOID ATAS ALJABAR MAX-PLUS	27
A. Cloaktik Monoid	27
B. Representasi Cloaktik Monoid Atas Aljabar Max-plus	46
BAB IV PENUTUP	69
A. Kesimpulan	69
B. Saran	70
DAFTAR PUSTAKA	71
DAFTAR RIWAYAT HIDUP	74

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul	Halaman
Tabel 3.1	<i>Subword convex</i> dari w	29
Tabel 3.2	<i>Subword u convex</i> dari word w	30
Tabel 3.3	Panjang maksimum <i>subword u convex</i> dari word w yang tidak menurun	31
Tabel 3.4	Panjang maksimum <i>subword u convex</i> dari word b yang tidak menurun	33
Tabel 3.5	Panjang maksimum <i>subword u convex</i> dari word c yang tidak menurun	33
Tabel 3.6	Panjang maksimum <i>subword u convex</i> dari word g yang tidak menurun	35
Tabel 3.7	Panjang maksimum <i>subword u convex</i> dari word h yang tidak menurun	35
Tabel 3.8	Panjang maksimum <i>subword u convex</i> dari word p yang tidak menurun	37
Tabel 3.9	Panjang maksimum <i>subword u convex</i> dari word q yang tidak menurun	37
Tabel 3.10	Panjang maksimum <i>subword u convex</i> dari word r yang tidak menurun	38
Tabel 3.11	Panjang maksimum <i>subword u convex</i> dari word s yang tidak menurun	39
Tabel 3.12	Panjang maksimum <i>subword u convex</i> dari word t yang tidak menurun	40
Tabel 3.13	Panjang maksimum <i>subword u convex</i> dari word v yang tidak menurun	41

Tabel 3.14	Panjang maksimum <i>subword</i> u <i>convex</i> dari <i>word</i> w yang tidak menurun	42
Tabel 3.15	Panjang maksimum <i>subword</i> u <i>convex</i> dari <i>word</i> x yang tidak menurun	43
Tabel 3.16	Panjang maksimum <i>subword</i> u <i>convex</i> dari <i>word</i> y yang tidak menurun	44

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Operasi biner adalah suatu fungsi himpunan dari dua elemen ke elemen lain dalam himpunan yang sama (Mas'oed, 2013). Operasi biner memiliki sifat-sifat tertentu seperti assosiatif, komutatif, memiliki elemen identitas, dan memiliki elemen invers. Suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi sifat-sifat tertentu akan membentuk struktur aljabar (Gallian, 2021). Salah satu contoh struktur aljabar yang digunakan dalam penelitian ini adalah semigrup, monoid, dan semiring. Semigrup merupakan struktur aljabar yang memenuhi sifat assosiatif. Semigrup dengan elemen identitas disebut monoid (Lisapaly & Persulesy, 2011).

Selain itu, struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner $(+, \cdot)$ dan memenuhi aksioma $(T, +)$ monoid komutatif, $(T, \cdot)$ monoid, $(T, +, \cdot)$ bersifat distributif, dan mempunyai elemen penyerap disebut semiring (Hasnani & Puspita, 2021). Beberapa semiring memiliki sifat tambahan seperti idempotent dan komutatif terhadap salah satu atau kedua operasinya (Muanalifah, 2023). Salah satu contoh dari semiring idempotent adalah aljabar max-plus, yang merupakan himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dilengkapi dua operasi biner $\oplus$ (maksimum) dan $\otimes$ (penjumlahan). Secara formal aljabar max-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ dimana $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real (Farlow, 2009).

Aljabar max-plus mengalami perkembangan yang signifikan, baik dalam ranah ilmu terapan maupun dalam pengembangan teori struktur aljabar. Dalam ranah ilmu terapan, aljabar max-plus sering digunakan untuk memodelkan masalah seperti manufaktur (Singgih, 2014), sistem antrian (Wibowo, 2018), sistem jalan dan kereta (Farhi, 2019) serta optimasi produksi (Bermanei, dkk., 2024). Sedangkan dalam teori struktur aljabar diantaranya seperti semigrup idempoten dalam aljabar max-plus (Izhakian & Shustin, 2012) dan identitas semigrup pada semigrup matriks max-plus (Aird, 2023).

Selanjutnya ada beberapa penelitian terdahulu yang telah mengkaji hubungan dari struktur cloaktik monoid dengan aljabar max-plus, diantaranya penelitian oleh Zur Izhakian pada tahun 2019 yang berjudul "*Tropical plactic algebra, the cloaktic monoid, and semigroup representations*". Penelitian ini memperkenalkan konsep *tropical plactic algebra* dan membentuk cloaktik monoid yang dapat direpresentasikan secara linier menggunakan *tropical matrix* (Izhakian, 2019). Kemudian pada tahun 2018, Zur Izhakian dan Glenn Merlet melakukan penelitian yang berjudul "*Semigroup identities of tropical matrices through matrix ranks*". Penelitian ini mengkaji cloaktik monoid memenuhi identitas semigrup dalam aljabar max-plus (Izhakian & Merlet, 2018). Pada tahun 2019, Marianne Johnsoni dan Mark Kambites melakukan penelitian yang berjudul "*Tropical representation and identities of plactic monoids*". Penelitian ini mengkaji representasi tropikal cloaktik monoid dalam identitas aljabar dan teori automata (Johnson & Kambites, 2021).

Berdasarkan latar belakang yang dijelaskan diatas, penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam terkait "Representasi Linier Cloaktik Monoid Atas Aljabar Max-Plus" sebagaimana yang telah dikaji pada jurnal "*Tropical plactic algebra, the cloaktic monoid, and semigroup representations*" oleh Izhakian pada tahun 2019. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui definisi dari cloaktik monoid serta representasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus.

B. Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang diatas, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui definisi cloaktik monoid serta representasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus.

C. Tinjauan Pustaka

Penelitian Zur Izhakian (2019) dipublikasikan pada jurnal yang berjudul "*Tropical plactic algebra, the cloaktic monoid, and semigroup representations*" memperkenalkan konsep *tropical plactic algebra* yang menggabungkan struktur plaktik monoid dengan relasi knuth, serta perluasannya dalam bentuk cloaktik monoid. Penelitian ini menunjukkan bahwa cloaktik monoid dapat direpresentasikan secara linier menggunakan matriks troplaktik serta membuka peluang baru dalam analisis kombinatorial dan teori representasi semigrup (Izhakian, 2019).

Penelitian Zur Izhakian dan Glenn Merlet (2018) dipublikasikan pada jurnal yang berjudul "*Semigroup identities of tropical matrices through matrix ranks*" meneliti identitas semigrup yang dipenuhi oleh *tropical matrix* dan menunjukkan

bahwa cloaktik monoid dan co-cloaktik monoid memenuhi seluruh identitas yang dipenuhi oleh matriks segitiga atas dalam aljabar max-plus, memperkuat argumen bahwa monoid tersebut dapat dipelajari secara efektif melalui representasi *tropical* linier (Izhakian & Merlet, 2018).

Penelitian Marianne Johnsoni dan Mark Kambites (2021) dipublikasikan pada jurnal yang berjudul "*Tropical representation and identities of plactic monoids*" mengembangkan perspektif yang lebih luas terkait representasi tropikal dari plaktik monoid, termasuk seperti cloaktik monoid serta membahas peran representasi tersebut dalam mengkaji identitas aljabar dan struktur semiring berbobot yang muncul dalam teori automata dan komputasi kombinatorik (Johnson & Kambites, 2021).

D. Metodologi Penelitian

Pada bab ini, penulis akan menguraikan langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam penelitian ini. Metode yang digunakan adalah metode kepustakaan (library research), yang berfungsi untuk mengumpulkan data, informasi, serta objek kajian dari sumber tertulis. Adapun tahapan pelaksanaan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari jurnal berjudul *Tropical plactic algebra, the cloactic monoid, and semigroup representations* oleh Zur Izhakian pada tahun 2019 secara mendalam untuk memahami perumusan cloaktik monoid, serta metode representasi semigrup yang digunakan dalam aljabar tropikal.

2. Mengkaji konsep dasar semigrup dan monoid, termasuk operasi biner, sifat asosiatif, elemen identitas, dan relasi ekuivalen yang digunakan dalam pembentukan monoid. Teori yang diperoleh pada tahap ini akan menjadi fondasi dalam mendefinisikan cloaktik monoid.
3. Menelaah definisi dan struktur dari aljabar max-plus, serta penerapannya dalam konteks matriks dan semigrup. Kajian ini digunakan untuk memetakan ulang elemen-elemen cloaktik monoid agar sesuai dengan operasi dasar aljabar max-plus (maksimum dan penjumlahan).
4. Mendefinisikan cloaktik monoid dalam aljabar max-plus, dengan menyusun relasi ekuivalen yang sesuai dengan himpunan pembentuknya.
5. Merepresentasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus dengan menggunakan matriks troplaktik.
6. Menyusun simpulan berdasarkan hasil analisis teoritis, serta menyajikan definisi formal dari cloaktik monoid dalam aljabar max-plus secara sistematis dan Representasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus.

E. Sistematika Penelitian

Dalam penelitian ini, disusun empat bab utama yang dibagi lagi ke dalam beberapa sub-bab untuk memudahkan pembaca dalam memahami keseluruhan isi. Struktur penulisan penelitian ini akan dijelaskan secara rinci sebagai berikut:

1. BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini berisi tentang latar belakang masalah, tujuan penelitian, tinjauan pustaka, metodologi penelitian, dan sistematika penelitian.

2. BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab ini memuat tentang teori-teori dasar yang digunakan dalam pembahasan diantaranya yaitu semigrup, aljabar max-plus serta relasi knuth.

3. BAB III REPRESENTASI LINIER CLOAKTIK MONOID ATAS ALJABAR MAX-PLUS

Pada bab ini membahas tentang definisi cloaktik monoid serta representasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus.

4. BAB IV PENUTUP

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan saran penelitian selanjutnya untuk dikaji.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini memaparkan definisi yang menjadi dasar pembahasan mengenai cloaktik monoid atas aljabar max-plus. Teori yang dibahas mencakup tiga aspek utama yaitu definisi dasar semigrup (Cain, 2020 dan Surodjo & Susanti, 2024), definisi dasar aljabar max-plus (Baccelli, dkk., 1992 dan Farlow, 2009 serta Mas'oed, 2013) dan definisi relasi knuth (Izhakian, 2019 dan Davey, 2002).

A. Semigrup

Pada bagian ini menjelaskan beberapa definisi dasar semigrup. Sebelum membahas semirup terlebih dahulu diberikan definisi operasi biner. Operasi biner didefinisikan sebagai suatu fungsi himpunan dari dua elemen ke elemen lain dalam himpunan yang sama. Berikut adalah definisi dari operasi biner.

Definisi 2.1.1 Operasi Biner

Diberikan T himpunan tak kosong serta operasi $\diamond$ disebut operasi biner jika fungsi $\diamond : T \times T \rightarrow T$.

Contoh 2.1.2 Operasi Biner

Operasi penjumlahan $+$ merupakan operasi biner pada bilangan bulat $\mathbb{Z}$, karena operasi $+$ tertutup pada $\mathbb{Z}$.

Operasi biner memiliki beberapa sifat tertentu diantaranya yaitu asosiatif, komutatif, mempunyai elemen identitas dan memiliki elemen invers. Berikut akan dijelaskan sifat-sifat dari

operasi biner.

Definisi 2.1.3 Sifat-sifat Operasi Biner

Suatu operasi biner $\diamond$ pada himpunan tak kosong T dikatakan

1. **Asosiatif**, jika $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$ untuk $\forall x, y, z \in T$
2. **Komutatif**, jika $x \diamond y = y \diamond x$ untuk $\forall x, y \in T$
3. **Mempunyai elemen identitas** (e), jika $\exists e \in T$ sehingga $e \diamond x = x \diamond e = x$ untuk $\forall x \in T$
4. **Memiliki elemen invers**, elemen $x \in T$ dikatakan mempunyai invers terhadap $\diamond$ di T , jika $\exists y \in T$ sehingga $y \diamond x = x \diamond y = e$

Selanjutnya operasi biner yang memenuhi sifat tertentu akan membentuk struktur aljabar baru. Salah satu contohnya adalah semigrup. Semigrup merupakan struktur aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat asosiatif. Berikut adalah definisi dari semigrup.

Definisi 2.1.4 Semigrup

Misalkan T adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner $\diamond$. Struktur aljabar $(T, \diamond)$ dikatakan semigrup jika operasi $\diamond$ bersifat asosiatif, yaitu untuk $\forall x, y, z \in T$ berlaku $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$.

Contoh 2.1.5 Semigrup

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$, didefinisikan operasi biner $x \diamond y = x + y + xy$. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{N}, \diamond)$ adalah suatu semigrup.

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{N}, \diamond)$ dengan operasi biner $x \diamond y = x + y + xy$ merupakan semigrup. Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{N}$ sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
 (x \diamond y) \diamond z &= (x + y + xy) \diamond z \\
 &= (x + y + xy) + z + (x + y + xy)z \\
 &= x + y + xy + z + xz + yz + xyz \\
 &= x + (y + z + yz) + (xy + xz + xyz) \\
 &= x + (y + z + yz) + (y + z + yz)x \\
 &= x \diamond (y + z + yz) \\
 &= x \diamond (y \diamond z)
 \end{aligned}$$

Jadi $(\mathbb{N}, \diamond)$ merupakan suatu semigrup dengan operasi biner $x \diamond y = x + y + xy$ untuk $\forall x, y, x \in \mathbb{N}$.

Selain memiliki sifat asosiatif, jika suatu semigrup dilengkapi dengan elemen identitas terhadap operasi biner yang digunakan, maka struktur tersebut disebut sebagai monoid. Berikut adalah definisi dari Monoid.

Definisi 2.1.6 Monoid

Diberikan $(T, \diamond)$ adalah semigrup. Himpunan T dikatakan monoid jika $\exists e \in T$ maka $x \diamond e = e \diamond x = x$ untuk $\forall x \in T$.

Contoh 2.1.7 Monoid

Diberikan $\mathbb{Z} = (\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ merupakan himpunan bilangan bulat dengan operasi biner penjumlahan $+$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ adalah monoid.

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ dengan operasi biner $+$ merupakan monoid.

1. Asosiatif

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}$, diperoleh $(x + y) + z = x + (y + z) \in \mathbb{Z}$.

2. Memiliki elemen identitas

Ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}$ dimana $\exists 0 \in \mathbb{Z}$, diperoleh $x + 0 = 0 + x = x \in \mathbb{Z}$.

Jadi $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan monoid dengan operasi biner $+$.

Setelah mengetahui definisi dari monoid, selanjutnya akan dibahas konsep pemetaan yang mempertahankan struktur operasi biner pada semigrup, yaitu homomorfisma semigrup.

Definisi 2.1.8 Homomorfisma Semigrup

Diberikan $(S, *)$ dan $(T, \diamond)$ adalah semigrup. Pemetaan $\delta : S \rightarrow T$ disebut homomorfisma semigrup jika setiap $x, y \in S$ berlaku

$$\delta(S * T) = \delta(S) \diamond \delta(T).$$

Contoh 2.1.9 Homomorfisma Semigrup

Diberikan $(\mathbb{N}, +)$ dan $(\mathbb{N}, \times)$ merupakan semigrup. Pemetaan δ didefinisikan

$$\delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \delta(x) = 2^x \text{ untuk } \forall x \in \mathbb{N}.$$

Akan dibuktikan bahwa pemetaan δ merupakan homomorfisma semigrup.

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa pemetaan δ merupakan homomorfisma semigrup. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{N}$, diperoleh

$$\begin{aligned}\delta(x + y) &= 2^{x+y} \\ &= 2^x \times 2^y \\ &= \delta(x) \times \delta(y)\end{aligned}$$

Karena δ memenuhi aturan homomorfisma, sehingga dapat disimpulkan bahwa pemetaan δ merupakan homomorfisma semigrup.

B. Aljabar Max-Plus

Pada bagian ini menjelaskan beberapa definisi dasar aljabar max-plus. Sebelum membahas aljabar max-plus terlebih dahulu diberikan definisi semiring.

Definisi 2.2.1 Semiring

Misalkan T adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner $+$ (penjumlahan) dan $\cdot$ (perkalian) yang dapat ditulis $(T, +, \cdot)$ dikatakan semiring jika

1. $(T, +)$ adalah monoid komutatif

(i) Asosiatif

$$\forall x, y, z \in T \text{ berlaku } (x + y) + z = x + (y + z)$$

(ii) Mempunyai elemen identitas

$$\exists 0 \in T \text{ sedemikian sehingga } 0 + x = x + 0 = x. \forall x \in T$$

(iii) Komutatif

$$\forall x, y \in T \text{ berlaku } x + y = y + x$$

2. $(T, \cdot)$ adalah monoid

(i) Asosiatif

$$\forall x, y, z \in T \text{ berlaku } (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

(ii) Mempunyai elemen identitas

$$\exists 1 \in T \text{ sedemikian sehingga } 1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \forall x \in T$$

3. $(T, +, \cdot)$ bersifat distributif kiri dan kanan

$$(i) x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(ii) (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

4. Mempunyai elemen penyerap

$$\exists 0 \in T \text{ sehingga } x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0, \forall x \in T$$

Berdasarkan definisi semiring yang telah dijelaskan sebelumnya, berikut disajikan beberapa contoh sederhana yang memenuhi sifat-sifat semiring tersebut.

Contoh 2.2.2 Semiring

Himpunan semua bilangan real positif dan nol $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ merupakan semiring terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$) bilangan riil.

Selain semiring bilangan real positif, terdapat pula contoh semiring lain yang memiliki operasi berbeda, yaitu aljabar max-plus. Struktur ini menggunakan operasi maksimum dan penjumlahan, seperti dijelaskan berikut ini.

Contoh 2.2.3 Aljabar Max-Plus

Diberikan $\mathbb{R}_{max}$ adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ yang dilengkapi dengan operasi bilangan $\oplus$ (maksimum) dan $\otimes$ (penjumlahan). Struktur aljabar $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring yang disebut aljabar max-plus. Untuk $\forall x, y \in \mathbb{R}_{max}$ didefinisikan

sebagai berikut

$$x \oplus y = \max(x, y)$$

$$x \otimes y = x + y$$

Selanjutnya aljabar max-plus dapat diperluas dalam bentuk matriks. Misalkan matriks $m \times n$ pada aljabar max-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}^{m \times n}$. Untuk $m = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ dan $n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dimana $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \neq 0$. Matriks $X = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ dimana $i \in m$ merupakan baris dan $j \in n$ merupakan kolom pada matriks. Matriks X dapat ditulis sebagai berikut

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Adapun matriks yang memiliki banyak baris dan kolom yang sama disebut matriks persegi. Matriks persegi dinotasikan dengan $Y \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dan dapat ditulis sebagai

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}$$

Dalam aljabar max-plus, operasi aritmatika dapat diaplikasikan dalam bentuk matriks. Berikut akan dijelaskan operasi aritmatika dasar aljabar max-plus.

1. Penjumlahan matriks

Diberikan matriks X dan Y dengan ukuran yang sama, maka kedua matriks tersebut dapat dijumlahkan. Elemen-elemen pada kedua matriks tersebut memiliki letak yang sama sehingga dapat dijumlahkan. Berikut akan dijelaskan definisi dari penjumlahan matriks dalam aljabar max-plus.

Definisi 2.2.4 Penjumlahan Matriks

Diberikan $X, Y \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ sehingga penjumlahan $X \oplus Y$ dapat didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} X \oplus Y &= [X \oplus Y]_{ij} \\ &= x_{ij} \oplus y_{ij} \\ &= \max(x_{ij}, y_{ij}) \end{aligned}$$

dimana $\forall i \in m, j \in n$.

Contoh 2.2.5 Penjumlahan Matriks

Diberikan $X, Y \in \mathbb{R}_{max}^{2 \times 2}$. Misalkan

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Akan dihitung operasi dari $X \oplus Y$ dan $Y \oplus X$

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi penjumlahan matriks diatas, operasi $X \oplus Y$ dapat dihitung sebagai berikut

$$\begin{aligned}
X \oplus Y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \oplus 0 & 2 \oplus -1 \\ 2 \oplus 1 & 4 \oplus 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(1, 0) & \max(2, -1) \\ \max(2, 1) & \max(4, 1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sedangkan hasil penjumlahan dari $Y \oplus X$ yaitu

$$\begin{aligned}
Y \oplus X &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \oplus 1 & -1 \oplus 2 \\ 1 \oplus 2 & 1 \oplus 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(0, 1) & \max(-1, 2) \\ \max(1, 2) & \max(1, 4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Dari kedua hasil penjumlahan $X \oplus Y$ dan $Y \oplus X$ didapatkan hasil yang sama yaitu

$$X \oplus Y = Y \oplus X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Perkalian matriks

Misalkan dipunyai matriks X dan Y . Perkalian dua matriks dapat dilakukan jika matriks X memiliki banyak kolom yang sama dengan banyak baris pada matriks Y . Berikut merupakan definisi dari perkalian matriks dalam aljabar max-plus.

Definisi 2.2.6 Perkalian Matriks

Diberikan $X \in \mathbb{R}_{max}^{m \times p}$ dan $Y \in \mathbb{R}_{max}^{p \times n}$, perkalian $X \otimes Y$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} X \otimes Y &= [X \otimes Y]_{ij} \\ &= \bigoplus_{k=1}^p (x_{ik} \otimes y_{kj}) \\ &= \max_{k=1}^p (x_{ik} + y_{kj}) \end{aligned}$$

dimana $\forall i \in m, j \in n$.

Contoh 2.2.7 Perkalian Matriks

Diberikan $X \in \mathbb{R}_{max}^2$ dan $Y \in \mathbb{R}_{max}^2$. Misalkan

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } Y = \begin{bmatrix} -2 & \infty \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Akan dihitung operasi dari $X \otimes Y$ dan $Y \otimes X$.

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi perkalian matriks diperoleh hasil dari operasi $X \otimes Y$ yaitu sebagai berikut

$$\begin{aligned}
X \otimes Y &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1 \otimes -2) \oplus (-2 \otimes 4) & (1 \otimes 0) \oplus (-2 \otimes 3) \\ (-\infty \otimes -2) \oplus (1 \otimes 4) & (-\infty \otimes 0) \oplus (1 \otimes 3) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1 + -2) \oplus (-2 + 4) & (1 + 0) \oplus (-2 + 3) \\ (-\infty + -2) \oplus (1 + 4) & (-\infty + 0) \oplus (1 + 3) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \oplus 2 & 1 \oplus 1 \\ -\infty \oplus 5 & -\infty \oplus 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(-1, 2) & \max(1, 1) \\ \max(-\infty, 5) & \max(-\infty, 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sedangkan hasil perkalian matriks dari $Y \otimes X$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
Y \otimes X &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-2 \otimes 1) \oplus (0 \otimes -\infty) & (-2 \otimes -2) \oplus (0 \otimes 1) \\ (4 \otimes 1) \oplus (3 \otimes -\infty) & (4 \otimes -2) \oplus (3 \otimes 1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-2 + 1) \oplus (0 + -\infty) & (-2 + -2) \oplus (0 + 1) \\ (4 + 1) \oplus (3 + -\infty) & (4 + -2) \oplus (3 + 1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \oplus -\infty & 0 \oplus 1 \\ 5 \oplus -\infty & 2 \oplus 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(-1, -\infty) & \max(0, 1) \\ \max(5, -\infty) & \max(2, 4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. Perkalian skalar

Misalkan dipunyai matriks X dan x adalah skalar. Perkalian matriks dengan skalar dapat dilakukan dengan mengalikan setiap elemen pada matriks X dengan skalar x . Berikut merupakan definisi dari perkalian matriks dengan skalar dalam aljabar max-plus.

Definisi 2.2.8 Perkalian Skalar

Diberikan $X \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ dan $x \in \mathbb{R}_{max}$. Perkalian $x \otimes X$ dapat didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} x \otimes X &= [x \otimes X]_{ij} \\ &= x \otimes X_{ij} \\ &= x + x_{ij} \end{aligned}$$

dimana $\forall i \in m, j \in n$.

Contoh 2.2.9 Perkalian Skalar

Diberikan $X \in \mathbb{R}_{max}^{3 \times 2}$ dan skalar $x = -2$ untuk $x \in \mathbb{R}_{max}$.

Misalkan

$$X = \begin{bmatrix} 2 & \infty \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Akan dihitung operasi dari $x \otimes X$.

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi perkalian skalar diatas, diperoleh hasil dari operasi $x \otimes X$ yaitu sebagai berikut

$$\begin{aligned}
x \otimes X &= -2 \otimes \begin{bmatrix} 2 & \infty \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 \otimes 2 & -2 \otimes \infty \\ -2 \otimes -1 & -2 \otimes 1 \\ -2 \otimes 3 & -2 \otimes 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 + 2 & -2 + \infty \\ -2 + -1 & -2 + 1 \\ -2 + 3 & -2 + 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{sehingga diperoleh } x \otimes X = \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

C. Relasi Knuth

Pada bagian ini akan dijelaskan definisi dari relasi knuth. Namun, sebelum itu akan diberikan definisi dari himpunan terurut total. Berikut akan dijelaskan definisi dari himpunan terurut total.

Definisi 2.3.1 Himpunan Terurut Total

Diberikan I merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner $\leq$ (atau $<$). Struktur $(I, \leq$ (atau $<))$ merupakan himpunan terurut total, jika operasi biner $\leq$ (atau $<$) memenuhi sifat-sifat sebagai berikut

1. **Refleksif**, untuk $\forall i \in I$ berlaku $i \leq i$.
2. **Antisimetri**, jika $i \leq j$ dan $j \leq i$, maka $i = j$ untuk $\forall i, j \in I$.
3. **Transitif**, jika $i \leq j$ dan $j \leq k$, maka $i \leq k$ untuk $\forall i, j, k \in I$.
4. **Totalitas**, untuk $\forall i, j \in I$ selalu berlaku $i \leq j$ atau $j \leq i$.

Contoh 2.3.2 Himpunan Terurut Total

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Relasi $\leq$ didefinisikan sebagai "kurang dari atau sama dengan" pada $\mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{N}, \leq)$ merupakan himpunan terurut total. Penyelesaian:

Ambil sebarang $i, j, k \in \mathbb{N}$.

1. Refleksif, setiap $i \leq j$.
2. Antisimetri, setiap $i \leq j$ dan $j \leq i$, maka $i = j$.
3. Transitif, untuk $i \leq j$ dan $j \leq k$, maka $i \leq k$.
4. Totalitas, setiap $i \leq j$.

Dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{N}, \leq)$ merupakan himpunan terurut.

Selanjutnya akan dijelaskan definisi dari *alphabet*. Berikut merupakan definisi dari *alphabet*.

Definisi 2.3.3 Alphabet

Diberikan I merupakan himpunan terurut total dengan relasi $<$ dan $I \subseteq \mathbb{N}$. Misalkan A adalah himpunan tak kosong dengan $a_\ell \in A$ untuk $\ell = \{1, 2, 3, \dots, n\} \in I$. Elemen a_ℓ disebut simbol atau letter. Himpunan dari simbol atau letters disebut *alphabet* dinotasikan A_I .

Contoh 2.3.4 Alphabet

Diberikan himpunan $I = (\mathbb{N}, <)$ merupakan himpunan terurut total. Misalkan A merupakan himpunan tak kosong dengan *letters* $a_\ell \in A$ untuk $\ell = \{1, 2, 3, 4, 5\} \in I$. *Alphabet* pada A dapat ditulis sebagai $A_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$.

Berdasarkan definisi 2.3.1 *alphabet* A_I yang dilengkapi dengan relasi orde total $<$ merupakan *alphabet* terurut total $A_I = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dengan urutannya $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Selanjutnya, susunan dari simbol atau *letters* pada *alphabet* akan membentuk *word*. Berikut akan dijelaskan definisi dari *word*.

Definisi 2.3.5 Word

Misalkan A_I adalah *alphabet*. *Word* merupakan urutan berhingga dari *letters* $a_\ell \in A_I$ untuk $\ell = \{1, 2, 3, \dots, n\} \in I$.

Contoh 2.3.6 Word

Diberikan *alphabet* $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$. *Word* yang dapat terbentuk dari *alphabet* A_3 yaitu sebagai berikut

$$u = a_1, v = a_2, w = a_3$$

$$x = a_1a_2, y = a_1a_3, z = a_2a_3$$

$$p = a_1a_1a_1, q = a_1a_2a_3, r = a_1a_3a_2 \text{ dan seterusnya.}$$

Setelah mengetahui definisi dari *word* yaitu urutan berhingga dari *letters* pada *alphabet*, selanjutnya akan diberikan definisi dari *subword*. Berikut akan dijelaskan definisi dari *subword*.

Definisi 2.3.7 Subword

Misalkan A_I adalah alphabet terurut total dan word $u, w \in A_I^*$. Word u dikatakan subword dari w dinotasikan $u \subseteq w$, apabila word u adalah urutan berhingga yang diperoleh dengan memilih beberapa letter dari w secara kontingu maupun tidak kontingu, tanpa mengubah urutan asli dari letters pada w .

Contoh 2.3.8 Subword

Diberikan alphabet terurut total $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ dan word $w \in A_3^*$ yaitu $w = a_1a_2a_3a_2$. Subword $u \subseteq w$ yaitu sebagai berikut

$$u_1 = (), u_2 = a_1, u_3 = a_1a_3, u_4 = a_1a_2, u_5 = a_2a_2, \\ u_6 = a_1a_2a_3, u_7 = a_1a_2a_2, u_8 = a_1a_2a_3a_2, \text{ dan seterusnya.}$$

Subword u_1, u_2, u_4, u_6, u_8 merupakan subword kontingu. Sedangkan subword u_3, u_5, u_7 merupakan subword tidak kontingu.

Selanjutnya akan dijelaskan definisi dari panjang word. Berikut adalah definisi dari panjang word.

Definisi 2.3.9 Panjang Word

Diberikan A_I adalah alphabet dan w adalah word. Panjang word adalah jumlah simbol atau letters dari w dilambangkan $|w|$ dan $|w| \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Contoh 2.3.10 Panjang Word

Diberikan alphabet $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$, didapatkan panjang word dari A_3 yaitu

$u = ()$, diperoleh $|u| = 0$

$v = a_1$, diperoleh $|v| = 1$

$w = a_1a_2$, diperoleh $|w| = 2$

$p = a_1a_2a_3$, diperoleh $|p| = 3$, dan seterusnya.

Selanjutnya, himpunan semua *word* yang terbentuk dari *letters* pada *alphabet* termasuk *word* kosong $\{()\}$ dinotasikan A_I^* . Sedangkan himpunan semua *word* yang terbentuk dari *letters* pada *alphabet* tidak termasuk *word* kosong $\{()\}$ dinotasikan A_I^+ . Berikutnya, *alphabet* akan terbentuk menjadi struktur aljabar jika dilengkapi dengan operasi biner yang disebut operasi konkatenasi. Definisi dari operasi konkatenasi akan dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.3.11 Operasi Konkatenasi

Diberikan A_I^* merupakan himpunan semua *word* pada *alphabet* A_I dan *word* $u, v \in A_I^*$. Operasi konkatenasi $\circ$ didefinisikan sebagai pemetaan

$$\circ : A^* \times A^* \rightarrow A^*$$

$$u \circ v \longmapsto uv$$

Contoh 2.3.12 Operasi Konkatenasi

Misalkan *word* $u, v \in A_I^*$ dengan $u = a_1a_1a_2$ dan $v = a_1a_2a_3$. Operasi konkatenasi pada *word* u, v diperoleh $u \circ v = a_1a_1a_2 \circ a_1a_2a_3 = a_1a_1a_2a_1a_2a_3$

Setelah dijelaskan operasi konkatenasi sebagai penggabungan dua *word* dengan cara menyusun *letters* secara berurutan, selanjutnya dibentuk struktur aljabar yang disebut *free monoid*. *Free monoid* merupakan himpunan semua *word* (termasuk kata kosong) pada *alphabet* yang dilengkapi dengan operasi konkatenasi dan memiliki *word* kosong sebagai elemen identitas. Berikut akan dijelaskan definisi dari *free monoid*.

Definisi 2.3.13 Free Monoid

Diberikan A_I^* merupakan himpunan semua *word* pada *alphabet* A_I termasuk *word* kosong $\{()\}$ yang dilengkapi dengan operasi konkatenasi $\circ$. Struktur $(A_I^*, \circ)$ dikatakan *free monoid* jika

1. **Asosiatif**, untuk $\forall u, v, w \in A_I^*$ berlaku $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
2. **Memiliki Elemen Identitas**, $\exists e \in A_I^*$ sehingga $u \circ e = e \circ u = u$ untuk $\forall u \in A_I^*$.

Contoh 2.3.14 Free Monoid

Diberikan *word* $u, v, w \in A_I^*$ dengan $u = a_1a_1a_2, v = a_1a_3a_2$ dan $w = a_1a_2a_3$. Operasi konkatenasi $\circ$ didefinisikan $u \circ v = uv$. Akan dibuktikan bahwa $(A_I^*, \circ)$ merupakan *free monoid*.

Penyelesaian:

Diketahui $u, v, w \in A_I^*$ dengan $u = a_1a_1a_2, v = a_1a_3a_2, w = a_1a_2a_3$. Akan dibuktikan bahwa $(A_I^*, \circ)$ merupakan *free monoid*.

1. Asosiatif

$$\begin{aligned}
 (u \circ v) \circ w &= (a_1 a_1 a_2 \circ a_1 a_3 a_2) \circ a_1 a_2 a_3 \\
 &= a_1 a_1 a_2 a_1 a_3 a_2 \circ a_1 a_2 a_3 \\
 &= a_1 a_1 a_2 a_1 a_3 a_2 a_1 a_2 a_3 \\
 &= a_1 a_1 a_2 \circ a_1 a_3 a_2 a_1 a_2 a_3 \\
 &= a_1 a_1 a_2 \circ (a_1 a_3 a_2 \circ a_1 a_2 a_3) \\
 &= u \circ (v \circ w)
 \end{aligned}$$

2. Memiliki elemen identitas

$$\begin{aligned}
 u \circ e &= a_1 a_1 a_2 \circ () = a_1 a_1 a_2 = u \\
 e \circ u &= () \circ a_1 a_1 a_2 = a_1 a_1 a_2 = u
 \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa $(A_I^*, \circ)$ merupakan *free monoid*.

Dari definisi sebelumnya, diketahui bahwa *alphabet* adalah himpunan *letters* yang berurutan. Urutan ini dapat diatur ulang dengan menggunakan aturan knuth tanpa mengubah makna atau nilai. Hal inilah yang disebut dengan relasi knuth. Berikut akan dijelaskan definisi dari relasi knuth.

Definisi 2.3.15 Relasi Knuth

Diberikan himpunan *alphabet* terurut total $A_I = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dengan urutan $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ dan himpunan semua word pada *alphabet* terurut total A_I dinotasikan A_I^* . Relasi knuth dinotasikan dengan $\equiv_{knu}$ merupakan relasi ekuivalensi pada A_I^* . Untuk setiap

$a_1, a_2, a_3 \in A_I^*$ berlaku

KN1. $a_1 a_2 a_3 \equiv_{knu} a_3 a_1 a_2$ jika $a_1 \leq a_2 < a_3$

KN2. $a_2 a_1 a_3 \equiv_{knu} a_2 a_3 a_1$ jika $a_1 < a_2 \leq a_3$

Contoh 2.3.16 Relasi Knuth

Diberikan himpunan *alphabet* terurut $A_4 = \{a_1 < a_2 < a_3 < a_4\}$.

Misalkan $a_1 = a_2, a_2 = a_3, a_3 = a_4$. Relasi yang terbentuk yaitu

KN1. untuk $a_2 \leq a_3 < a_4$ diperoleh $a_2 a_3 a_4 \equiv_{knu} a_4 a_2 a_3$

KN2. untuk $a_1 < a_2 \leq a_3$ diperoleh $a_3 a_2 a_4 \equiv_{knu} a_3 a_4 a_2$

BAB III

REPRESENTASI CLOAKTIK MONOID ATAS ALJABAR MAX-PLUS

A. Cloaktik Monoid

Pada bab ini akan dibahas mengenai definisi cloaktik monoid. Sebelum itu, akan dijelaskan sifat-sifat khusus pada himpunan. Sifat *convex* merupakan salah satu contoh sifat pada himpunan. Berikut akan dijelaskan definisi dari *convex*.

Definisi 3.1.1 Convex

Diberikan $\mathbb{N}$ merupakan himpunan bilangan asli. Misalkan himpunan $I \subseteq \mathbb{N}$ dan I merupakan himpunan terurut total. Himpunan $J \subseteq I$ disebut *convex* dinotasikan $J \subseteq_{cx} I$, jika $\forall i, j \in J$ dengan $i < j$ dan setiap elemen $k \in I$ berlaku $i < k < j$ maka $k \in J$.

Contoh 3.1.2 Convex

Diberikan $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $J = \{1, 2, 3, 4\}$ dimana $J \subseteq I$. Himpunan J adalah *convex* ($J \subseteq_{cx} I$).

Selanjutnya akan dijelaskan definisi dari himpunan subset *alphabet convex*. Berikut merupakan definisi himpunan subset *alphabet convex*.

Definisi 3.1.3 Himpunan Subset Alphabet Convex

Misalkan A_I merupakan *alphabet terurut total* dengan I merupakan himpunan terurut total. Himpunan subset *alphabet convex* A_J adalah himpunan subset $A_J \subseteq A_I$ dengan $J \subseteq_{cx} I$ merupakan *convex*.

Contoh 3.1.4 Himpunan Subset Alphabet Convex

Diberikan *alphabet* terurut total $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$. Himpunan subset *alphabet convex* A_J yang terbentuk dari A_3 yaitu

1. $A_{J_1} = \{a_1\}$
2. $A_{J_2} = \{a_2\}$
3. $A_{J_3} = \{a_3\}$
4. $A_{J_4} = \{a_1, a_2\}$
5. $A_{J_5} = \{a_2, a_3\}$
6. $A_{J_6} = \{a_1, a_2, a_3\}$

Selanjutnya akan diberikan definisi dari *subword convex*. Berikut merupakan definisi *subword convex*.

Definisi 3.1.5 Subword Convex

Misalkan A_I merupakan *alphabet* terurut total, himpunan subset *alphabet* $A_J \subseteq A_I$ dengan $J \subseteq_{cx} I$ merupakan *convex*. Diberikan word $w \in A_I^*$. *Subword u convex* dari w adalah *subword u* yang seluruh *letters* berada didalam subset *alphabet* A_J . Secara formal, *subword u convex* didefinisikan

$$sw_J(w); = \{u \subseteq w | u \in A_J^+\} \text{ dengan } J \subseteq_{cx} I \text{ convex.}$$

Contoh 3.1.6 Subword Convex

Diberikan *alphabet* terurut total $A_2 = \{a_1, a_2\}$ dengan urutan $a_1 < a_2$ serta word $w = a_1 a_2 a_1 \in A_2^*$. *subword u convex* yang terbentuk dari word w yaitu sebagai berikut

1. Daftar himpunan subset *alphabet convex* A_J dari $A_2 = \{a_1, a_2\}$ yaitu sebagai berikut

(a) $J_1 = \{a_1\}$

(b) $J_2 = \{a_2\}$

(c) $J_3 = \{a_1, a_2\}$

2. *Subword u convex* dari $w = a_1a_2a_1$ yaitu

Tabel 3.1. *Subword convex* dari w

J	$sw_J(w)$
$\{1\}$	a_1a_1
$\{2\}$	a_2
$\{1, 2\}$	$a_1a_2a_1$

Selanjutnya, adapun *subword convex* dari *word* tidak menurun yang artinya urutan setiap *letters* pada *subword* tidak menurun. Berikut akan dijelaskan definisi dari *subword convex* tidak menurun.

Definisi 3.1.7 *Subword Convex Tidak Menurun*

Misalkan A_I merupakan *alphabet* terurut total, himpunan subset *alphabet* $A_J \subseteq A_I$ dengan $J \subseteq_{cx} I$ merupakan *convex*. Diberikan *word* $w \in A_I^*$. *Subword u convex* dari *word* w dikatakan tidak menurun jika urutan *letters* pada *subword u* tidak menurun. Dengan kata lain, jika $u = a_1a_2...a_n$ maka $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Secara formal, *subword u convex* dari *word* w tidak menurun dinotasikan $\overrightarrow{sw}_J(w)$.

Contoh 3.1.8 Subword Convex Tidak Menurun

Diberikan *alphabet* terurut total A_2 dan *word* $w = a_1a_2a_1 \in A_2^*$. *Subword* u *convex* dari *word* w yang tidak menurun yaitu sebagai berikut

1. Daftar himpunan subset *alphabet convex* A_J dari $A_2 = \{a_1, a_2\}$ adalah
 - (a) $J_1 = \{a_1\}$
 - (b) $J_2 = \{a_2\}$
 - (c) $J_3 = \{a_1, a_2\}$
2. *Subword* u *convex* dari *word* $w = a_1a_2a_1$ yang tidak menurun yaitu

Tabel 3.2. *Subword* u *convex* dari *word* w

J	$sw_J(w)$	$\overrightarrow{sw}_J(w)$	Tidak menurun
{1}	a_1a_1	a_1	ya
		a_1a_1	ya
{2}	a_2	a_2	ya
{1, 2}	$a_1a_2a_1$	a_1	ya
		a_2	ya
		a_1a_2	ya
		a_1a_1	ya
		a_2a_1	tidak
		$a_1a_2a_1$	tidak

Selanjutnya akan diberikan definisi dari panjang maksimum *subword convex* dari *word* yang tidak menurun. Berikut merupakan definisi dari panjang maksimum *subword convex* tidak menurun.

Definisi 3.1.9 Panjang Maksimum Subword Convex Tidak Menurun

Diberikan A_I merupakan alphabet terurut total, himpunan subset alphabet $A_J \subseteq A_I$ dengan $J \subseteq_{cx} I$ merupakan convex. Diberikan word $w \in A_I^*$. Panjang maksimum subword u convex dari word w yang tidak menurun merupakan jumlah dari letters subword u yang tidak menurun terpanjang untuk setiap letters pada himpunan subset alphabet convex A_J . Secara formal didefinisikan

$$\overrightarrow{len}_J(w) := \max\{len(u) | u \in \overrightarrow{sw}_J(w)\}$$

Contoh 3.1.10 Panjang Maksimum Subword Convex Tidak Menurun

Diberikan alphabet terurut total A_2 dan word $w = a_1a_2a_1 \in A_2^*$. Berdasarkan contoh 3.1.6 didapatkan panjang maksimum subword u convex dari word w yang tidak menurun yaitu

Tabel 3.3. Panjang maksimum subword u convex dari word w yang tidak menurun

J	$sw_J(w)$	$\overrightarrow{sw}_J(w)$	$\overrightarrow{len}_J(w)$	Maksimum
{1}	a_1a_1	a_1	1	tidak
		a_1a_1	2	ya
{2}	a_2	a_2	1	ya
{1, 2}	$a_1a_2a_1$	a_1	1	tidak
		a_2	1	tidak
		a_1a_2	2	ya
		a_1a_1	2	ya

Selanjutnya, akan diberikan definisi dari cloaktik monoid. Berikut merupakan definisi cloaktik monoid.

Definisi 3.1.11 Cloaktik Monoid

Diberikan sebuah alphabet terurut total $A_I = \{a_\ell | \ell \in I\}$ dengan $\ell = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dan $I \subseteq \mathbb{N}$ merupakan himpunan terurut total. Misalkan A_I^* merupakan free monoid. Dua word $u, v \in A_I^*$ dikatakan setara atau ekuivalen $u \equiv_{clk} v$ jika

$$u \equiv_{clk} v \iff \overrightarrow{len}_J(u) = \overrightarrow{len}_J(v)$$

untuk setiap himpunan subset alphabet convex $A_J \subseteq_{cx} A_I$. Cloaktik monoid merupakan himpunan kelas-kelas equivalen terhadap relasi $\equiv_{clk}$ dengan operasi konkatenasi $\circ$. Cloaktik monoid dinotasikan $K_I := A_I^* / \equiv_{clk}$.

Contoh 3.1.12 Relasi Cloaktik

Diberikan alphabet terurut total $A_2 = \{a_1, a_2\}$ dengan $a_1 < a_2$ serta word $b, c \in A_2^*$ yaitu

$$b = a_1 a_2 a_1 a_2 \text{ dan } c = a_2 a_1 a_1 a_2$$

Akan dibuktikan bahwa $b \equiv_{clk} c$, yaitu word b berelasi cloaktik dengan word c .

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa $b \equiv_{clk} c$, yaitu word b berelasi cloaktik dengan word c .

1. Daftar himpunan subset alphabet convex A_J dari $A_2 = \{a_1, a_2\}$ yaitu sebagai berikut

$$(a) A_{J_1} = \{a_1\}$$

$$(b) A_{J_2} = \{a_2\}$$

$$(c) A_{J_3} = \{a_1, a_2\}$$

2. Menghitung $\overrightarrow{len}_J(b)$ dan $\overrightarrow{len}_J(c)$

Selanjutnya akan dicari panjang maksimum *subword* u *convex* dari masing-masing *word* b dan c pada setiap himpunan subset *alphabet convex* A_J yang tidak menurun.

Untuk $b = a_1a_2a_1a_2$

Tabel 3.4. Panjang maksimum *subword* u *convex* dari *word* b yang tidak menurun

A_J	$sw_J(b)$	$\overrightarrow{sw}_J(b)$	$\overrightarrow{len}_J(b)$
$\{1\}$	a_1a_1	a_1a_1	2
$\{2\}$	a_2a_2	a_2a_2	2
$\{1, 2\}$	$a_1a_2a_1a_2$	$a_1a_2a_2$	3

Untuk $c = a_2a_1a_1a_2$

Tabel 3.5. Panjang maksimum *subword* u *convex* dari *word* c yang tidak menurun

A_J	$sw_J(c)$	$\overrightarrow{sw}_J(c)$	$\overrightarrow{len}_J(c)$
$\{1\}$	a_1a_1	a_1a_1	2
$\{2\}$	a_2a_2	a_2a_2	2
$\{1, 2\}$	$a_2a_1a_1a_2$	$a_1a_1a_2$	3

3. Membandingkan $\overrightarrow{len}_J(b)$ dan $\overrightarrow{len}_J(c)$

Dari tabel diatas menunjukkan bahwa setiap panjang maksimum *subword* u *convex* dari masing-masing *word* b dan c pada setiap himpunan subset *alphabet convex* A_J yang tidak menurun memiliki nilai yang sama. Secara formal dapat ditulis dengan

$$\overrightarrow{len}_J(b) = \overrightarrow{len}_J(c)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $b \equiv_{clk} c$ yaitu b belerasi cloaktik dengan c .

Contoh 3.1.13 Relasi Cloaktik

Diberikan *alphabet* terurut total $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ dengan $a_1 < a_2 < a_3$ serta *word* $g, h \in A_3^*$ yaitu

$$g = a_1 a_3 a_2 \text{ dan } h = a_3 a_1 a_2$$

Akan dibuktikan bahwa $g \equiv_{clk} h$, yaitu *word* g berelasi cloaktik dengan *word* h .

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa $g \equiv_{clk} h$, yaitu *word* g berelasi cloaktik dengan *word* h .

1. Daftar himpunan subset *alphabet convex* A_J dari $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ yaitu sebagai berikut

- (a) $A_{J_1} = \{a_1\}$

- (b) $A_{J_2} = \{a_2\}$

- (c) $A_{J_3} = \{a_3\}$

- (d) $A_{J_4} = \{a_1, a_2\}$

- (e) $A_{J_5} = \{a_2, a_3\}$

- (f) $A_{J_6} = \{a_1, a_2, a_3\}$

2. Menghitung $\overrightarrow{len}_J(g)$ dan $\overrightarrow{len}_J(h)$

Selanjutnya akan dicari panjang maksimum *subword* u *convex* dari masing-masing *word* g dan h pada setiap himpunan subset *alphabet convex* A_J yang tidak menurun.

Untuk $g = a_1a_3a_2$

Tabel 3.6. Panjang maksimum *subword u convex* dari *word g* yang tidak menurun

A_J	$sw_J(g)$	$\overrightarrow{sw}_J(g)$	$\overrightarrow{len}_J(g)$
$\{1\}$	a_1	a_1	1
$\{2\}$	a_2	a_2	1
$\{3\}$	a_3	a_3	1
$\{1, 2\}$	a_1a_2	a_1a_2	2
$\{2, 3\}$	a_3a_2	—	0
$\{1, 2, 3\}$	$a_1a_3a_2$	a_1a_3	2

Untuk $h = a_3a_1a_2$

Tabel 3.7. Panjang maksimum *subword u convex* dari *word h* yang tidak menurun

A_J	$sw_J(h)$	$\overrightarrow{sw}_J(h)$	$\overrightarrow{len}_J(h)$
$\{1\}$	a_1	a_1	1
$\{2\}$	a_2	a_2	1
$\{3\}$	a_3	a_3	1
$\{1, 2\}$	a_1a_2	a_1a_2	2
$\{2, 3\}$	a_3a_2	—	0
$\{1, 2, 3\}$	$a_3a_1a_2$	a_1a_2	2

3. Membandingkan $\overrightarrow{len}_J(g)$ dan $\overrightarrow{len}_J(h)$

Dari tabel diatas menunjukkan bahwa setiap panjang maksimum *subword u convex* dari masing-masing *word g* dan *h* pada setiap himpunan subset *alphabet convex* A_J yang tidak menurun memiliki nilai yang sama. Secara formal dapat ditulis dengan

$$\overrightarrow{len}_J(g) = \overrightarrow{len}_J(h)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $g \equiv_{clk} h$ yaitu g belerasi cloaktik dengan h .

Contoh 3.1.14 Relasi Cloaktik

Diberikan *alphabet* terurut total $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ dengan $a_1 < a_2 < a_3$ serta *word* $p, q, r \in A_3^*$ yaitu

$$p = a_1 a_2 a_3 a_2, q = a_1 a_3 a_2 a_2 \text{ dan } r = a_3 a_1 a_2 a_2$$

Akan dibuktikan bahwa $p \equiv_{clk} q, q \equiv_{clk} r$ dan $p \equiv_{clk} r$.

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa $p \equiv_{clk} q, q \equiv_{clk} r$ dan $p \equiv_{clk} r$.

1. Daftar himpunan subset *alphabet convex* A_J dari $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ yaitu sebagai berikut

- (a) $A_{J_1} = \{a_1\}$
- (b) $A_{J_2} = \{a_2\}$
- (c) $A_{J_3} = \{a_3\}$
- (d) $A_{J_4} = \{a_1, a_2\}$
- (e) $A_{J_5} = \{a_2, a_3\}$
- (f) $A_{J_6} = \{a_1, a_2, a_3\}$

2. Menghitung $\overrightarrow{len}_J(p)$ dan $\overrightarrow{len}_J(q)$

Selanjutnya akan dicari panjang maksimum *subword* u *convex* dari masing-masing *word* p, q dan r pada setiap himpunan subset *alphabet convex* A_J yang tidak menurun.

Untuk $p = a_1a_2a_3a_2$

Tabel 3.8. Panjang maksimum *subword* u *convex* dari *word* p yang tidak menurun

A_J	$sw_J(p)$	$\overrightarrow{sw}_J(p)$	$\overrightarrow{len}_J(p)$
$\{1\}$	a_1	a_1	1
$\{2\}$	a_2a_2	a_2a_2	2
$\{3\}$	a_3	a_3	1
$\{1, 2\}$	$a_1a_2a_2$	$a_1a_2a_2$	3
$\{2, 3\}$	$a_2a_3a_2$	a_2a_3	2
$\{1, 2, 3\}$	$a_1a_2a_3a_2$	$a_1a_2a_3$	3

Untuk $q = a_1a_3a_2a_2$

Tabel 3.9. Panjang maksimum *subword* u *convex* dari *word* q yang tidak menurun

A_J	$sw_J(q)$	$\overrightarrow{sw}_J(q)$	$\overrightarrow{len}_J(q)$
$\{1\}$	a_1	a_1	1
$\{2\}$	a_2a_2	a_2a_2	2
$\{3\}$	a_3	a_3	1
$\{1, 2\}$	$a_1a_2a_2$	$a_1a_2a_2$	3
$\{2, 3\}$	$a_3a_2a_2$	a_2a_2	2
$\{1, 2, 3\}$	$a_1a_3a_2a_2$	$a_1a_2a_2$	3

Untuk $r = a_3a_1a_2a_2$

Tabel 3.10. Panjang maksimum *subword* u *convex* dari *word* r yang tidak menurun

A_J	$sw_J(r)$	$\overrightarrow{sw}_J(r)$	$\overrightarrow{len}_J(r)$
$\{1\}$	a_1	a_1	1
$\{2\}$	a_2a_2	a_2a_2	2
$\{3\}$	a_3	a_3	1
$\{1, 2\}$	$a_1a_2a_2$	$a_1a_2a_2$	3
$\{2, 3\}$	$a_3a_2a_2$	a_2a_2	2
$\{1, 2, 3\}$	$a_3a_1a_2a_2$	$a_1a_2a_2$	3

3. Membandingkan $\overrightarrow{len}_J(p)$, $\overrightarrow{len}_J(q)$ dan $\overrightarrow{len}_J(r)$

Dari tabel diatas menunjukkan bahwa setiap panjang maksimum *subword* u *convex* dari masing-masing *word* p , q dan r pada setiap himpunan subset *alphabet convex* A_J yang tidak menurun memiliki nilai yang sama. Secara formal dapat ditulis dengan

$$\overrightarrow{len}_J(p) = \overrightarrow{len}_J(q) = \overrightarrow{len}_J(r)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $p \equiv_{clk} q$, $q \equiv_{clk} r$ dan $p \equiv_{clk} r$, atau dapat juga ditulis $p \equiv_{clk} q \equiv_{clk} r$.

Contoh 3.1.15 Bukan Relasi Cloaktik

Diberikan *alphabet* terurut total $A_2 = \{a_1, a_2\}$ dengan $a_1 < a_2$ serta *word* $s, t \in A_2^*$ yaitu

$$s = a_1 \text{ dan } t = a_2$$

Akan dibuktikan bahwa $s \not\equiv_{clk} t$ yaitu *word* s tidak berelasi cloaktik dengan *word* t .

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa $s \not\equiv_{clk} t$ yaitu *word* s tidak berelasi cloaktik dengan *word* t .

1. Daftar himpunan subset *alphabet convex* A_J dari $A_2 = \{a_1, a_2\}$ yaitu sebagai berikut

(a) $A_{J_1} = \{a_1\}$

(b) $A_{J_2} = \{a_2\}$

(c) $A_{J_3} = \{a_1, a_2\}$

2. Menghitung $\overrightarrow{len}_J(s)$ dan $\overrightarrow{len}_J(t)$

Selanjutnya akan dicari panjang maksimum *subword* u *convex* dari masing-masing *word* s dan t pada setiap himpunan subset *alphabet convex* A_J yang tidak menurun.

Untuk $s = a_1$

Tabel 3.11. Panjang maksimum *subword* u *convex* dari *word* s yang tidak menurun

A_J	$sw_J(s)$	$\overrightarrow{sw}_J(s)$	$\overrightarrow{len}_J(s)$
$\{1\}$	a_1	a_1	1
$\{2\}$	—	—	0
$\{1, 2\}$	—	—	0

Untuk $t = a_2$

Tabel 3.12. Panjang maksimum *subword u convex* dari *word t* yang tidak menurun

A_J	$sw_J(t)$	$\overrightarrow{sw}_J(t)$	$\overrightarrow{len}_J(t)$
$\{1\}$	—	—	0
$\{2\}$	a_2	a_2	1
$\{1, 2\}$	—	—	0

3. Membandingkan $\overrightarrow{len}_J(s)$ dan $\overrightarrow{len}_J(t)$

Dari tabel diatas menunjukkan bahwa setiap panjang maksimum *subword u convex* dari masing-masing *word s* dan *t* pada setiap himpunan subset *alphabet convex* A_J yang tidak menurun memiliki nilai yang tidak sama. Secara formal dapat ditulis dengan

$$\overrightarrow{len}_J(s) \neq \overrightarrow{len}_J(t)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $s \not\equiv_{clk} t$ yaitu *word s* tidak berelasi cloaktik dengan *word t*.

Contoh 3.1.16 Bukan Relasi Cloaktik

Diberikan *alphabet* terurut total $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ dengan $a_1 < a_2 < a_3$ dan dua *word* $v, w \in A_3^*$ yaitu

$$v = a_1 a_2 a_3 a_2 \text{ dan } w = a_1 a_2 a_2 a_3$$

Akan dibuktikan bahwa $v \not\equiv_{clk} w$ yaitu *word v* tidak berelasi cloaktik dengan *word w*.

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa $v \not\equiv_{clk} w$ yaitu *word* v tidak berelasi cloaktik dengan *word* w .

1. Daftar himpunan subset *alphabet convex* A_J dari $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ yaitu sebagai berikut

- (a) $A_{J_1} = \{a_1\}$
- (b) $A_{J_2} = \{a_2\}$
- (c) $A_{J_3} = \{a_3\}$
- (d) $A_{J_4} = \{a_1, a_2\}$
- (e) $A_{J_5} = \{a_2, a_3\}$
- (f) $A_{J_6} = \{a_1, a_2, a_3\}$

2. Menghitung $\overrightarrow{len}_J(v)$ dan $\overrightarrow{len}_J(w)$

Selanjutnya akan dicari panjang maksimum *subword* u *convex* dari masing-masing *word* v dan w pada setiap himpunan subset *alphabet convex* A_J yang tidak menurun.

Untuk $v = a_1a_2a_3a_2$

Tabel 3.13. Panjang maksimum *subword* u *convex* dari *word* v yang tidak menurun

A_J	$sw_J(v)$	$\overrightarrow{sw}_J(v)$	$\overrightarrow{len}_J(v)$
$\{1\}$	a_1	a_1	1
$\{2\}$	a_2a_2	a_2a_2	2
$\{3\}$	a_3	a_3	1
$\{1, 2\}$	$a_1a_2a_2$	$a_1a_2a_2$	3
$\{2, 3\}$	$a_2a_3a_2$	a_2a_3	2
$\{1, 2, 3\}$	$a_1a_2a_3a_2$	$a_1a_2a_3$	3

Untuk $w = a_1a_2a_2a_3$

Tabel 3.14. Panjang maksimum *subword* u *convex* dari *word* w yang tidak menurun

A_J	$sw_J(w)$	$\overrightarrow{sw}_J(w)$	$\overrightarrow{len}_J(w)$
$\{1\}$	a_1	a_1	1
$\{2\}$	a_2a_2	a_2a_2	2
$\{3\}$	a_3	a_3	1
$\{1, 2\}$	$a_1a_2a_2$	$a_1a_2a_2$	3
$\{2, 3\}$	$a_2a_2a_3$	$a_2a_2a_3$	3
$\{1, 2, 3\}$	$a_1a_2a_2a_3$	$a_1a_2a_2a_3$	4

3. Membandingkan $\overrightarrow{len}_J(v)$ dan $\overrightarrow{len}_J(w)$

Dari tabel diatas menunjukkan bahwa setiap panjang maksimum *subword* u *convex* dari masing-masing *word* v dan w pada setiap himpunan subset *alphabet convex* A_J yang tidak menurun memiliki nilai yang tidak sama. Secara formal dapat ditulis dengan

$$\overrightarrow{len}_J(v) \neq \overrightarrow{len}_J(w)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $v \not\equiv_{clk} w$ yaitu *word* v tidak berelasi cloaktik dengan *word* w .

Contoh 3.1.17 Bukan Relasi Cloaktik

Diberikan *alphabet* terurut total $A_2 = \{a_1, a_2\}$ dengan $a_1 < a_2$ serta *word* $x, y \in A_2^*$ yaitu

$$x = a_1a_2 \text{ dan } y = a_1a_2a_1$$

Akan dibuktikan bahwa $x \not\equiv_{clk} y$ yaitu *word* x tidak berelasi cloaktik dengan *word* y .

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa $x \not\equiv_{clk} y$ yaitu *word* x tidak berelasi cloaktik dengan *word* y .

1. Daftar himpunan subset *alphabet convex* A_J dari $A_2 = \{a_1, a_2\}$ yaitu sebagai berikut

(a) $A_{J_1} = \{a_1\}$

(b) $A_{J_2} = \{a_2\}$

(c) $A_{J_3} = \{a_1, a_2\}$

2. Menghitung $\overrightarrow{len}_J(x)$ dan $\overrightarrow{len}_J(y)$

Selanjutnya akan dicari panjang maksimum *subword* u *convex* dari masing-masing *word* x dan y pada setiap himpunan subset *alphabet convex* A_J yang tidak menurun.

Untuk $x = a_1a_2$

Tabel 3.15. Panjang maksimum *subword* u *convex* dari *word* x yang tidak menurun

A_J	$sw_J(x)$	$\overrightarrow{sw}_J(x)$	$\overrightarrow{len}_J(x)$
$\{1\}$	a_1	a_1	1
$\{2\}$	a_2	a_2	1
$\{1, 2\}$	a_1a_2	a_1a_2	2

Untuk $y = a_1 a_2 a_1$

Tabel 3.16. Panjang maksimum *subword u convex* dari *word y* yang tidak menurun

A_J	$sw_J(y)$	$\overrightarrow{sw}_J(y)$	$\overrightarrow{len}_J(y)$
$\{1\}$	$a_1 a_1$	$a_1 a_1$	2
$\{2\}$	a_2	a_2	1
$\{1, 2\}$	$a_1 a_2 a_1$	$a_1 a_2$	2

3. Membandingkan $\overrightarrow{len}_J(x)$ dan $\overrightarrow{len}_J(y)$

Dari tabel diatas menunjukkan bahwa setiap panjang maksimum *subword u convex* dari masing-masing *word x* dan *y* pada setiap himpunan subset *alphabet convex* A_J yang tidak menurun memiliki nilai yang tidak sama. Secara formal dapat ditulis dengan

$$\overrightarrow{len}_J(x) \neq \overrightarrow{len}_J(y)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $x \not\equiv_{clk} y$ yaitu *word x* tidak berelasi cloaktik dengan *word y*.

Selanjutnya akan dijelaskan definisi dari cloaktik monoid. Seperti yang sudah dijelaskan pada definsi 3.1.9, cloaktik monoid merupakan himpunan kelas-kelas equivalen terhadap relasi $\equiv_{clk}$ dengan operasi konkatenasi $\circ$. Himpunan kelas-kelas equivalen pada cloaktik monoid memiliki jumlah yang tak terhingga sehingga tidak dapat disebutkan semuanya. Namun, secara pasti pada cloaktik monoid memliki satu kelas equivalen yang elemennya merupakan *word* kosong $\{()\}$ sebagai elemen identitas. Selanjutnya, karena pengaruh operasi konkatenasi $\circ$

pada cloaktik monoid yaitu menggabungkan dua *word* menjadi satu, sehingga memenuhi sifat asosiatif.

Berdasarkan contoh 3.1.12, contoh 3.1.13, dan contoh 3.1.14 merupakan contoh dari elemen-elemen pada kelas-kelas equivalen yang berbeda pada cloaktik monoid. Pada contoh 3.1.12, *word* b dan c merupakan contoh elemen yang berelasi cloaktik yang berada pada kelas equivalen yang sama pada cloaktik monoid K_2 dengan panjang *word* yaitu 4. Pada contoh 3.1.13, *word* g dan h merupakan contoh elemen yang berelasi cloaktik yang berada pada kelas equivalen yang sama pada cloaktik monoid K_3 dengan panjang *word* yaitu 3. Sedangkan pada contoh 3.1.14, *word* p, q dan r merupakan contoh elemen yang berelasi cloaktik yang berada pada kelas equivalen yang sama pada cloaktik monoid K_3 dengan panjang *word* yaitu 4.

Selanjutnya pada contoh 3.1.15 didapatkan bahwa setiap *word* w dengan panjang 1 tidak akan membentuk relasi cloaktik $\equiv_{clk}$ kecuali dengan dirinya sendiri. Sedangkan berdasarkan contoh 3.1.17 didapatkan bahwa setiap *word* x yang direlasikan dengan *word* y dengan panjang *word* yang berbeda tidak akan membentuk relasi cloaktik. Karena syarat dari relasi cloaktik adalah mempunyai panjang *word* yang sama agar setiap panjang maksimum *subword* u *convex* dari masing-masing *word* pada setiap himpunan subset *alphabet convex* A_J yang tidak menurun memiliki nilai yang tidak sama.

Selanjutnya, *word* dengan panjang < 4 akan sangat sulit untuk menemukan *word* yang berelasi cloaktik. Meskipun ada *word* yang berelasi, tetapi peluang untuk menemukannya sangat kecil sekali. *Word* dengan panjang < 4 dapat berelasi cloaktik dengan dirinya sendiri. Hal ini sangat klasik sekali karena *word* yang direlasikan

cloaktik dengan dirinya sendiri sudah pasti akan membentuk relasi cloaktik. Namun, jika panjang $word > 4$ kemungkinan untuk menemukan $word$ yang berelasi cloaktik sangat besar. Karena semakin panjang $word$ yang digunakan, maka semakin besar pula peluang terbentuknya relasi cloaktik dengan syarat panjang $word$ harus sama.

B. Representasi Cloaktik Monoid Atas Aljabar Max-plus

Pada sub bab sebelumnya sudah dijelaskan definisi dari cloaktik monoid. Selanjutnya, pada sub bab ini akan dijelaskan mengenai representasi cloaktik monoid atas aljabar max-plus. Namun, sebelumnya akan dijelaskan definisi dari matriks κ -flat ℓ -corner. Diasumsikan parameter $\kappa > 0$. Berikut adalah definisi dari matriks κ -flat ℓ -corner.

Definisi 3.2.1 Matriks κ -flat ℓ -corner

Matriks κ -flat ℓ -corner merupakan kumpulan dari matriks yang dinotasikan $F_{(\ell)} = (f_{i,j}^{(\ell)})$ dengan $\ell = \{1, 2, \dots, n\}$ untuk matriks berukuran $n \times n$ dan κ merupakan parameter tetap. Secara formal matriks κ -flat ℓ -corner dinotasikan sebagai berikut

$$f_{i,j}^{(\ell)} = \begin{cases} \kappa & \text{jika } i \leq \ell \leq j \leq n, \\ -\infty & \text{lainnya,} \end{cases}$$

Contoh 3.2.2 Matriks κ -flat ℓ -corner

Diberikan matriks $F_{(3)} = (f_{i,j}^{(\ell)})$ dengan $\ell = \{1, 2, 3\}$ dan $\kappa = 1$. Akan direpresentasikan $F_{(3)}$ kedalam bentuk matriks.

Penyelesaian:

Diketahui $\ell = \{1, 2, 3\}$ dan $\kappa = 1$, maka $F_{(3)} = F_{(1)}F_{(2)}F_{(3)}$. Karena $n = 3$ maka matriks yang digunakan adalah matriks berukuran 3×3 . Dengan menggunakan aturan κ -flat ℓ -corner didapatkan,

1. Untuk $\ell = 1$ diperoleh,

$$F_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

2. Untuk $\ell = 2$ diperoleh,

$$F_{(2)} = \begin{bmatrix} -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

3. Untuk $\ell = 3$ diperoleh,

$$F_{(3)} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh,

$$F_{(3)} = F_{(1)}F_{(2)}F_{(3)}$$

$$F_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dijelaskan definisi dari matriks *layout*. Berikut merupakan definisi dari matriks *layout*.

Definisi 3.2.3 Matriks Layout

Matriks *layout* idempotent segitiga dinotasikan $E = (e_{i,j}) \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ sebagai matriks segitiga atas dengan elemen-elemen yang didefinisikan sebagai berikut

$$e_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{jika } i \leq j, \\ -\infty & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Contoh 3.2.4 Matriks Layout

Diberikan matriks E yang berukuran 3×3 dimana $E = (e_{i,j}) \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$. Akan direpresentasikan E kedalam bentuk matriks *layout*.

Penyelesaian:

Diketahui $E \in \mathbb{R}_{max}^{3 \times 3}$. Dengan menggunakan aturan dari matriks *layout* didapatkan elemen-elemen sebagai berikut

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya gabungan dari matriks κ -flat ℓ -corner dengan matriks *layout* akan membentuk matriks troplaktik. Berikut akan dijelaskan definisi dari matriks troplaktik.

Definisi 3.2.5 Matriks Troplaktik

Diberikan $\ell = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Matriks $A_{(\ell)}$ merupakan gabungan dari matriks E dan $F_{(\ell)}$ dinotasikan $A_{(\ell)} := E \vee F_{(\ell)} \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dimana $\vee$ adalah operasi maksimum dari setiap elemen. Matriks troplaktik didefinisikan sebagai $\Lambda_n = \langle A_{(\ell)} \rangle$.

Contoh 3.2.6 Matriks Troplaktik

Diberikan matriks $E, F_{(3)} \in \mathbb{R}_{max}^{3 \times 3}$. Akan direpresentasikan matriks E dan $F_{(3)}$ kedalam bentuk matriks troplaktik $\Lambda_n = \langle A_{(\ell)} \rangle$.

Penyelesaian:

Diketahui matriks $F_{(3)}$ dengan $\ell = \{1, 2, 3\}$. Dengan menggunakan aturan matriks κ -flat ℓ -corner diperoleh

$$\ell = 1 \mapsto F_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

$$\ell = 2 \mapsto F_{(2)} = \begin{bmatrix} -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

$$\ell = 3 \mapsto F_{(3)} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix}$$

Karena matriks $E \in \mathbb{R}_{max}^{3 \times 3}$ diperoleh

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dihitung matriks $A_{(\ell)}$. Karena $\ell = \{1, 2, 3\}$ maka $\Lambda_{(3)} = \langle A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)} \rangle$. Dengan menggunakan operasi $\vee$ didapatkan,

1. Untuk $\ell = 1$ diperoleh,

$$\begin{aligned}
 A_{(1)} &= E \vee F_{(1)} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \max(0, 1) & \max(0, 1) & \max(0, 1) \\ \max(-\infty, -\infty) & \max(0, -\infty) & \max(0, -\infty) \\ \max(-\infty, -\infty) & \max(-\infty, -\infty) & \max(0, -\infty) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Untuk $\ell = 2$ diperoleh,

$$\begin{aligned}
 A_{(2)} &= E \vee F_{(2)} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \max(0, -\infty) & \max(0, 1) & \max(0, 1) \\ \max(-\infty, -\infty) & \max(0, 1) & \max(0, 1) \\ \max(-\infty, -\infty) & \max(-\infty, -\infty) & \max(0, -\infty) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3. Untuk $\ell = 3$ diperoleh,

$$\begin{aligned}
 A_{(3)} &= E \vee F_{(3)} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \max(0, -\infty) & \max(0, -\infty) & \max(0, 1) \\ \max(-\infty, -\infty) & \max(0, -\infty) & \max(0, 1) \\ \max(-\infty, -\infty) & \max(-\infty, -\infty) & \max(0, 1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sehingga matriks troplaktik $\Lambda_3 = \langle A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)} \rangle$ diperoleh,

$$\begin{aligned}
 \Lambda_3 &= \langle A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)} \rangle \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Setelah mengetahui jenis-jenis dari matriks, selanjutnya setiap *letters* a_ℓ dapat direpresentasikan kedalam bentuk matriks atas aljabar max-plus. Berikut definisi representasi linier atas aljabar max-plus.

Definisi 3.2.7 Representasi Linier Atas Aljabar Max-Plus

Misalkan T adalah sembarang semigrup dan $M_n(\mathbb{R}_{\max})$ merupakan himpunan semua matriks pada aljabar max-plus berukuran $n \times n$. Pemetaan $\rho : T \rightarrow M_n(\mathbb{R}_{\max})$ disebut representasi linier atas aljabar max-plus jika ρ adalah homomorfisma.

Contoh 3.2.8 Representasi Linier Atas Aljabar Max-Plus

Misalkan $T = (\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup dan $M_2(\mathbb{R}_{max})$ merupakan himpunan matriks 2×2 dengan operasi $\otimes$. Pemetaan ρ didefinisikan $\rho : T \rightarrow M_2(\mathbb{R}_{max})$ dengan

$$\rho(n) = \begin{bmatrix} n & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}, \text{ dimana } n \in \mathbb{N}.$$

Akan ditunjukkan bahwa ρ merupakan representasi linier atas aljabar max-plus.

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa ρ merupakan homomorfisma jika memenuhi persamaan $\rho(m + n) = \rho(m) \otimes \rho(n)$.

1. Hitung $\rho(m + n)$

$$\rho(m + n) = \begin{bmatrix} m + n & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}$$

2. Hitung $\rho(m) \otimes \rho(n)$

$$\begin{aligned} \rho(m) \otimes \rho(n) &= \begin{bmatrix} m & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} n & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (m \otimes n \oplus -\infty \otimes -\infty) & (m \otimes -\infty \oplus -\infty \otimes 0) \\ (-\infty \otimes n \oplus 0 \otimes -\infty) & (-\infty \otimes -\infty \oplus 0 \otimes 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(m + n, -\infty) & \max(-\infty, -\infty) \\ \max(-\infty, -\infty) & \max(-\infty, 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m + n & -\infty \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Karena ρ memenuhi persamaan $\rho(m + n) = \rho(m) \otimes \rho(n)$, maka ρ merupakan homomorfisma. Dengan kata lain, ρ merupakan representasi linier atas aljabar max-plus.

Setelah dijelaskan mengenai definisi representasi linier atas aljabar max-plus, selanjutnya akan dijelaskan definisi dari representasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus. Representasi ini secara khusus mempelajari homomorfisma dari cloaktik monoid ke himpunan matriks dalam aljabar max-plus. Pada setiap elemen cloaktik monoid direpresentasikan sebagai transformasi linier yang konsisten dengan operasi max-plus. Berikut akan dijelaskan definisi dari representasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus.

Definisi 3.2.9 Representasi Linier Cloaktik Monoid Atas Aljabar Max-Plus

Misalkan $K_I := A_I^* / \equiv_{clk}$ adalah cloaktik monoid dengan $\ell = \{1, 2, 3, \dots, n\} \in I$ dan $M_n(\mathbb{R}_{max})$ merupakan himpunan semua matriks atas aljabar max-plus berukuran $n \times n$. Pemetaan β didefinisikan

$$\begin{aligned} \beta : K_I &\rightarrow M_n(\mathbb{R}_{max}) \\ a_\ell &\mapsto A_{(\ell)}, \ell = \{1, 2, 3, \dots, n\} \end{aligned}$$

Untuk semua word $w = a_1 a_2 \dots a_n \in K_I$ berlaku

$$\beta(w) = \beta(a_1) \otimes \dots \otimes \beta(a_n) = A_{(1)} \otimes \dots \otimes A_{(n)}$$

Pemetaan β merupakan representasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus jika β merupakan homomorfisma.

Contoh 3.2.10 Representasi Linier Cloaktik Monoid Atas Aljabar Max-Plus

Diberikan cloaktik monoid K_2 dengan $\ell = \{1, 2\}$ dan $M_2(\mathbb{R}_{max})$ merupakan himpunan semua matriks atas aljabar max-plus berukuran 2×2 . Akan ditunjukkan bahwa $\beta : K_2 \rightarrow M_2(\mathbb{R}_{max})$ merupakan representasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus.

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa $\beta : K_2 \rightarrow M_2(\mathbb{R}_{max})$ merupakan representasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus dengan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut,

1. Merepresentasikan setiap *letters* dari K_2 kedalam bentuk matriks troplaktik.

Diketahui $K_2 := A_2^* / \equiv_{clk}$ dengan $A_2 = \{a_1, a_2\}$ untuk $\ell = \{1, 2\}$. Terlebih dahulu akan dicari matriks κ -flat ℓ -corner yaitu

$$\begin{aligned}\ell = 1 &\mapsto F_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\infty & -\infty \end{bmatrix} \\ \ell = 2 &\mapsto F_{(2)} = \begin{bmatrix} -\infty & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari matriks *layout* $E \in \mathbb{R}_{max}^{2 \times 2}$ yaitu

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix}$$

Berikutnya yaitu merepresentasikan setiap *letters* a_1, a_2 kedalam bentuk matriks troplaktik, sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
a_1 \mapsto A_{(1)} &= F_{(1)} \vee E \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\infty & -\infty \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
a_2 \mapsto A_{(2)} &= F_{(1)} \vee E \\
&= \begin{bmatrix} -\infty & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. Mengambil sebarang *word* yang berelasi cloaktik pada cloaktik monoid. Ambil sebarang *word* $b, c \in K_2$ yaitu $b = a_1 a_2 a_1 a_2$ dan $c = a_2 a_1 a_1 a_2$ yang sudah dijelaskan pada contoh 3.1.12.
3. Merepresentasikan *word* b, c dalam bentuk matriks dengan operasi $\otimes$ dalam aljabar max-plus.

$$\begin{aligned}
\beta(b) &= A_{(1)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -\infty & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(c) &= A_{(2)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -\infty & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4. Karena pemetaan β merupakan homomorfisma, maka untuk setiap $b, c \in K_2$ berlaku $\beta(b \circ c) = \beta(b) \otimes \beta(c)$.

Akan dihitung $\beta(b \circ c)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
b \circ c &= (a_1 a_2 a_1 a_2) \circ (a_2 a_1 a_1 a_2) \\
&= a_1 a_2 a_1 a_2 a_2 a_1 a_1 a_2 \\
\beta(b \circ c) &= A_{(1)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(1)} \otimes \\
&\quad A_{(1)} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \otimes \\
&\quad A_{(2)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)} \otimes \\
&\quad A_{(1)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -\infty & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -\infty & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -\infty & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -\infty & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Akan dihitung $\beta(b) \otimes \beta(c)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\beta(b) \otimes \beta(c) &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -\infty & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -\infty & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Selanjutnya didapatkan $\beta(b \circ c) = \beta(b) \otimes \beta(c)$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -\infty & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -\infty & 4 \end{bmatrix}$$

Karena β merupakan homomorfisma, maka *word* b, c yang berelasi cloaktik yaitu $b \equiv_{clk} c$ dapat direpresentasikan melalui matriks dalam aljabar max-plus sehingga operasi konkatenasi $\circ$ di K_2 tetap terjaga yaitu

$$\beta(b \circ c) = \beta(b) \otimes \beta(c), \forall b, c \in K_2.$$

Dengan demikian, pemetaan β mempertahankan struktur cloaktik monoid untuk *word* b, c pada representasi linier atas aljabar max-plus.

Contoh 3.2.11 Representasi Linier Cloaktik Monoid Atas Aljabar Max-Plus

Diberikan cloaktik monoid K_3 dengan $\ell = \{1, 2, 3\}$ dan $M_3(\mathbb{R}_{max})$ merupakan himpunan semua matriks atas aljabar max-plus berukuran 3×3 . Akan ditunjukkan bahwa $\beta : K_3 \rightarrow M_3(\mathbb{R}_{max})$ merupakan representasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus.

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa $\beta : K_3 \rightarrow M_3(\mathbb{R}_{max})$ merupakan representasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus dengan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut,

1. Merepresentasikan setiap *letters* dari K_3 kedalam bentuk matriks troplaktik.

Diketahui $K_3 := A_3^* \setminus \equiv_{clk}$ dengan $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ untuk $\ell = \{1, 2, 3\}$. Dengan menggunakan matriks troplaktik pada contoh 3.2.6 didapatkan

$$a_1 \mapsto A_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_2 \mapsto A_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_3 \mapsto A_{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix}$$

2. Mengambil sebarang *word* yang berelasi cloaktik pada cloaktik monoid. Ambil sebarang *word* $p, q, r \in K_3$ yaitu $p = a_1 a_2 a_3 a_2$, $q = a_1 a_3 a_2 a_2$ dan $r = a_3 a_1 a_2 a_2$ yang sudah dijelaskan pada contoh 3.1.14.
3. Merepresentasikan p, q, r dalam bentuk matriks dengan operasi $\otimes$ dalam aljabar max-plus.

$$\begin{aligned} \beta(p) &= A_{(1)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(3)} \otimes A_{(2)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(3)} \otimes A_{(2)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -\infty & 1 & 2 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -\infty & 2 & 3 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(q) &= A_{(1)} \otimes A_{(3)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -\infty & 1 & 2 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -\infty & 2 & 3 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(r) &= A_{(3)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -\infty & 1 & 2 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -\infty & 2 & 3 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4. Karena pemetaan β merupakan homomorfisma, maka untuk setiap $p, q, r \in K_3$ berlaku

$$\beta(p \circ q) = \beta(p) \otimes \beta(q)$$

$$\beta(q \circ r) = \beta(q) \otimes \beta(r)$$

$$\beta(p \circ r) = \beta(p) \otimes \beta(r)$$

Selanjutnya akan dihitung pemetaan β dari masing-masing *word* yang berelasi cloaktik $\equiv_{clk}$.

(a) $\beta(p \circ q) = \beta(p) \otimes \beta(q)$

$$p \circ q = (a_1 a_2 a_3 a_2) \circ (a_1 a_3 a_2 a_2)$$

$$= a_1 a_2 a_3 a_2 a_1 a_3 a_2 a_2$$

$$\beta(p \circ q) = A_{(1)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(3)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(3)} \otimes$$

$$A_{(2)} \otimes A_{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(3)}$$

$$\otimes A_{(2)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(3)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)}$$

$$\otimes A_{(1)} \otimes A_{(3)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -\infty & 1 & 2 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(1)}$$

$$\otimes A_{(3)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -\infty & 2 & 3 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(3)} \\
&\quad \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -\infty & 2 & 3 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)} \\
&\quad \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -\infty & 2 & 4 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -\infty & 3 & 5 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -\infty & 4 & 6 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Akan dihitung $\beta(p) \otimes \beta(q)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\beta(p) \otimes \beta(q) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -\infty & 2 & 3 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -\infty & 2 & 3 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -\infty & 4 & 6 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Diperoleh $\beta(p \circ q) = \beta(p) \otimes \beta(q)$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -\infty & 4 & 6 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -\infty & 4 & 6 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix}$$

(b) $\beta(q \circ r) = \beta(q) \otimes \beta(r)$

$$q \circ r = (a_1 a_3 a_2 a_2) \circ (a_3 a_1 a_2 a_2)$$

$$= a_1 a_3 a_2 a_2 a_3 a_1 a_2 a_2$$

$$\beta(q \circ r) = A_{(1)} \otimes A_{(3)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(3)} \otimes A_{(1)} \otimes$$

$$A_{(2)} \otimes A_{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)}$$

$$\otimes A_{(2)} \otimes A_{(3)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)}$$

$$\otimes A_{(3)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -\infty & 1 & 2 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(3)}$$

$$\otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -\infty & 2 & 3 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes A_{(1)} \\
&\quad \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -\infty & 2 & 4 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)} \\
&\quad \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -\infty & 2 & 4 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -\infty & 3 & 5 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -\infty & 4 & 6 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Akan dihitung $\beta(q) \otimes \beta(r)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\beta(q) \otimes \beta(r) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -\infty & 2 & 3 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -\infty & 2 & 3 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -\infty & 4 & 6 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Diperoleh $\beta(q \circ r) = \beta(q) \otimes \beta(r)$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -\infty & 4 & 6 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -\infty & 4 & 6 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix}$$

(c) $\beta(p \circ r) = \beta(p) \otimes \beta(r)$

$$p \circ r = (a_1 a_2 a_3 a_2) \circ (a_3 a_1 a_2 a_2)$$

$$= a_1 a_2 a_3 a_2 a_3 a_1 a_2 a_2$$

$$\beta(p \circ r) = A_{(1)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(3)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(3)} \otimes A_{(1)} \otimes$$

$$A_{(2)} \otimes A_{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(3)}$$

$$\otimes A_{(2)} \otimes A_{(3)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)}$$

$$\otimes A_{(3)} \otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -\infty & 1 & 2 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(3)}$$

$$\otimes A_{(1)} \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -\infty & 2 & 3 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes A_{(1)} \\
&\quad \otimes A_{(2)} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -\infty & 2 & 4 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)} \\
&\quad \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -\infty & 2 & 4 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -\infty & 3 & 5 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\infty & 1 & 1 \\ -\infty & -\infty & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -\infty & 4 & 6 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Akan dihitung $\beta(p) \otimes \beta(r)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\beta(p) \otimes \beta(r) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -\infty & 2 & 3 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -\infty & 2 & 3 \\ -\infty & -\infty & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -\infty & 4 & 6 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Diperoleh $\beta(p \circ r) = \beta(p) \otimes \beta(r)$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -\infty & 4 & 6 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -\infty & 4 & 6 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix}$$

Karena β merupakan homomorfisma, maka *word* p, q, r yang berelasi cloaktik yang telah dibuktikan pada contoh 3.1.14 dapat direpresentasikan melalui matriks dalam aljabar max-plus sehingga operasi konkatenasi $\circ$ di K_3 tetap terjaga yaitu

$$\beta(p \circ q) = \beta(p) \otimes \beta(q)$$

$$\beta(q \circ r) = \beta(q) \otimes \beta(r)$$

$$\beta(p \circ r) = \beta(p) \otimes \beta(r)$$

untuk setiap $p, q, r \in K_3$. Dengan demikian, pemetaan β mempertahankan struktur cloaktik monoid untuk *word* p, q, r pada representasi linier atas aljabar max-plus.

Berdasarkan contoh 3.2.10 dan contoh 3.1.11 diperoleh bahwa setiap *word* yang berelasi cloaktik pada cloaktik monoid dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks troplaktik pada aljabar max-plus. Matriks ini selalu memenuhi sifat homomorfisma karena operasi yang digunakan pada *word* adalah operasi konkatenasi $\circ$ yang bersifat asosiatif. Sedangkan operasi pada matriks yang digunakan adalah operasi pada aljabar max-plus yaitu $\otimes$. Jika diperhatikan dengan seksama, operasi $\otimes$ pada matriks akan membentuk pola yang sama seperti operasi penjumlahan $+$ pada biasanya. Seperti definisi pada aljabar max-plus bahwa operasi $\otimes$ merupakan operasi penjumlahan. Hal inilah yang

menyebabkan bahwa setiap *word* pada cloaktik monoid yang direpresentasikan dalam bentuk matriks troplaktik akan memenuhi sifat homomorfisma. Dengan demikian, cloaktik monoid dapat direpresentasikan secara linier atas aljabar max-plus.

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Dalam skripsi ini telah dibahas mengenai representasi linier cloaktik monoid atas aljabar max-plus. Cloaktik monoid merupakan himpunan kelas-kelas equivalen terhadap relasi equivalen $\equiv_{clk}$ dengan operasi konkatenasi $\circ$. Melalui konsep ini, dua *word* dikatakan ekuivalen jika memiliki panjang maksimum *subword convex* dari *word* tidak menurun yang sama untuk setiap subset *alphabet convex* pada *alphabet* terurut total.

Selanjutnya diperkenalkan representasi dari cloaktik monoid dalam bentuk matriks pada aljabar max-plus. Dengan mendefinisikan matriks-matriks khusus seperti matriks κ -flat ℓ -corner dan matriks *layout*, dapat dibentuk matriks troplaktik yang merepresentasikan masing-masing *letters* dari *alphabet* dalam bentuk matriks. Kemudian, pemetaan dari cloaktik monoid ke himpunan matriks aljabar max-plus $M_n(\mathbb{R}_{max})$ yang bersifat homomorfisma, sehingga memenuhi syarat sebagai representasi linier.

Melalui contoh-contoh yang diberikan, diperoleh bahwa dua *word* yang ekuivalen dalam cloaktik monoid dapat direpresentasikan oleh hasil matriks yang sama dalam aljabar max-plus. Hal ini menunjukkan bahwa pemetaan tersebut memang valid sebagai representasi linier dari cloaktik monoid atas aljabar max-plus.

B. Saran

Pada skripsi ini, ruang lingkup yang dibahas terbatas pada representasi cloaktik monoid atas aljabar max-plus. Oleh karena itu, penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya merepresentasikan pada semiring tropikal seperti *fuzzy* semiring untuk melihat kemungkinan penerapan lebih luas di bidang optimasi dan teori automata.

DAFTAR PUSTAKA

- Aird, T.D. 2023. *Semigroup identities of tropical matrix semigroups*. PhD thesis, Department of Mathematics, School of Natural Sciences, University of Manchester.
- Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., dan Quadrat, J.P. 1992. *Synchronization and linearity*. (1). New York: Wiley.
- Bermanei, H. A., Böling, J. M., dan Högnäs, G. 2024. *Modeling and scheduling of production systems by using max-plus algebra*. Flexible Services and Manufacturing Journal, 36(1), 129-150.
- Cain, A.J., Gray, R.D., Malheiro, A. 2015. *Finite Gröbner–Shirshov bases for plactic algebras and bialgebraic structures for plactic monoids*. Journal of Algebra 423: 37–53.
- Davey, B.A., Priestley, H.A. 2002. *Introduction to lattices and order*. Edisi 2. Cambridge university press.
- Farhi, N. 2019. *Dynamic programming systems for modeling and control of the traffic in transportation networks*. [arXiv preprint arXiv:1911.01306](#).
- Farlow, G. Kasie. 2009. *Max-Plus algebra*. Tesis. Virginia: Universitas Negeri dan Institut Politeknik Virginia.
- Gallian, J.A. 2021. *Contemporary abstract algebra*. Edisi 10. Boca Raton: CRC Press.
- Hasnani, F., Puspita, N.P. 2021. *Ideal tak tereduksi kuat atas semiring komutatif*. Ambon: Universitas Pattimura.
- Herstein, I.N. 1996. *Abstract algebra*. Edisi 3. John Wiley & Sons.

- Hidayat, N. 2017. *Cara mudah memahami struktur aljabar (Teori, latihan, dan bukti lengkap)*. Malang: Universitas Brawijaya Press (UB Press).
- Izhakian, Z., Merlet, G. 2018. *Semigroup identities of tropical matrices through matrix ranks*. [arXiv preprint arXiv:1806.11028](#).
- Izhakian, Z. 2019. *Tropical plactic algebra, the cloaktic monoid, and semigroup representations*. Journal of Algebra. 524: 290-366.
- Izhakian, Z., Shustin, E. 2012. *Idempotent semigroups and tropical algebraic sets*. Journal of European Mathematical Society, 14, 489–520. DOI: 10.4171/JEMS/309.
- Johnson, M., Kambites, M. 2021. *Tropical representations and identities of plactic monoids*. Transactions of the American Mathematical Society. 374(6): 4423-4447.
- Lisapaly, S.R., Persulesy, E.R. 2011. *Semiring*. Jurnal Barekeng. 5(2): 45-47.
- Mas'ood, Fadli. 2013. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Akademia Permata.
- Muanalifah, A. 2023. *Komutatif matriks ordo 2×2 atas aljabar max-plus*. Jurnal Fourier. 12(1): 33-40.
- Singgih, M.L, Nurlina, N. 2014. *Alokasi resource sebagai perbaikan produksi menggunakan holonic manufacturing system, petri net dan aljabar max-plus*. Surabaya: Insitut Teknologi Sepuluh Nopember. 96-102.

- Surodjo, B., Susanti, Y. 2004. *Teori Semigrup*. Gadjah Mada University Press.
- Wibowo, A., Wijayanti, K., dan Veronica, R.B. 2018. *Penerapan aljabar max-plus pada pengaturan sistem antrian trrafic light*. UNNES Journal of Mathematics. 7(2): 193-205.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. Identitas Diri

- 1. Nama Lengkap : Icha Auliya Rizqiya
- 2. Tempat & Tgl. Lahir : Jepara, 1 Juni 2003
- 3. Alamat Rumah : Pendosawalan RT 21/ RW 08
Kec. Kalinyamatan Kab. Jepara
- 4. HP : 089516654021
- 5. E-mail : sukicak1603@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

- 1. Pendidikan Formal:
 - a. SDN 1 Bakalan
 - b. SMPN 1 Mayong
 - c. SMAN 1 Mayong
 - d. UIN Walisongo Semarang
- 2. Pendidikan Non Formal:
 - a. Riyadhotul 'Uqul Bakalan

Semarang, 1 Juni 2025

Icha Auliya Rizqiya

NIM: 2108046057