

KOSET PADA SUBGRUP FUZZY- (λ, μ)

SKRIPSI

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Syarat Guna Memperoleh
Gelar Sarjana Matematika
dalam Ilmu Matematika**



Oleh : ULI ROIHANATUNNI'MAH
NIM : 2108046042

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
SEMARANG
2025**

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Uli Roihanatunni'mah
NIM : 2108046042
Jurusan/Program Studi : Matematika/ Matematika

menyatakan bahwa skripsi yang berjudul :

KOSET PADA SUBGRUP FUZZY- (λ, μ)

secara keseluruhan adalah hasil penelitian/karya saya sendiri,
kecuali bagian tertentu yang dirujuk sumbernya.

Semarang, 10 Juni 2025

Pembuat pernyataan,



Uli Roihanatunni'mah

NIM : 2108046042



KEMENTERIAN AGAMA R.I.
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI WALISONGO
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Prof. Dr. Hamka (Kampus II) Ngaliyan Semarang
Telp. 024-7601295 Fax. 7615387

PENGESAHAN

Naskah skripsi berikut ini :

Judul : **KOSET PADA SUBGRUP FUZZY- (λ, μ)**
Penulis : Uli Roihanatunni'mah
NIM : 2108046042
Jurusan : Matematika

Telah diujikan dalam sidang *tugas akhir* oleh Dewan Penguji Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo dan dapat diterima sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam Ilmu Matematika.

Semarang, 13 Juni 2025

DEWAN PENGUJI

Penguji I,

Prihadi Kurniawan, M.Sc

NIP : 199012262019031012

Penguji II,

Any Muanalifah, M.Si., Ph.D.

NIP : 198201132011012009

Penguji III,

Yulia Romadiastri, S.Si, M.Sc

NIP : 198107152005012008

Penguji IV,

Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.

NIP : 199410092019032017

Pembimbing I,

Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.

NIP : 199410092019032017

NOTA DINAS

Semarang, 02 Juni 2025

Yth. Ketua Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Walisongo Semarang

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Dengan ini diberitahukan bahwa saya telah melakukan bimbingan, arahan dan koreksi naskah skripsi dengan:

Judul : KOSET PADA SUBGRUP FUZZY- (λ, μ)
Nama : Uli Roihanatunni'mah
NIM : 2108046042
Jurusan : Matematika

Saya memandang bahwa naskah skripsi tersebut sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi UIN Walisongo untuk diujikan dalam Sidang Munaqasyah.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pembimbing I,



Dinni Rahma Oktaviani, M.Si.
NIP : 199410092019032017

ABSTRAK

Ketidakpastian sering muncul dalam kehidupan sehari-hari, terutama saat mengelompokkan informasi yang tidak memiliki batas jelas. Untuk merepresentasikan hal ini, diperkenalkan konsep himpunan fuzzy, yang menyatakan keanggotaan elemen berdasarkan derajat keanggotaan antara 0 sampai 1. Salah satu pengembangannya adalah subgrup fuzzy yang kemudian digeneralisasi menjadi subgrup fuzzy- (λ, μ) dengan dua parameter tambahan, λ dan μ . Penelitian ini bertujuan mengkaji sifat koset kiri dan kanan, serta merumuskan koset tengah dalam struktur subgrup fuzzy- (λ, μ) . Metode yang digunakan berupa studi literatur dengan pendekatan teoritis, melalui penelaahan berbagai definisi, sifat, dan teorema yang relevan serta pembuktian secara matematis. Hasil penelitian menunjukkan bahwa koset kiri dan kanan dalam subgrup fuzzy- (λ, μ) memiliki karakteristik yang sejalan dengan koset pada grup klasik, namun ditentukan oleh derajat keanggotaan fuzzy. Selain itu, konstruksi koset tengah memberikan sudut pandang baru terhadap penyusunan dan hubungan antar elemen dalam grup fuzzy- (λ, μ) , serta membuka peluang untuk pengembangan lanjutan dalam teori aljabar fuzzy, serta penerapannya di berbagai bidang seperti kecerdasan buatan, sistem pakar, dan pengolahan data yang bersifat tidak pasti.

Kata kunci : Himpunan Fuzzy, Subgrup Fuzzy- (λ, μ) , Koset, Aljabar Fuzzy, Ketidakpastian

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "Koset pada Subgrup Fuzzy- (λ, μ) " sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Walisongo Semarang.

Skripsi ini membahas tentang konsep koset dalam struktur subgrup fuzzy- (λ, μ) , yang merupakan pengembangan dari konsep subgrup fuzzy biasa. Koset memiliki peran penting dalam teori grup karena membantu memahami struktur dan keterhubungan antar elemen dalam grup. Dengan pendekatan fuzzy, konsep ini diperluas agar dapat menangani data yang bersifat tidak pasti atau samar. Penulis tertarik mengkaji topik ini karena kombinasi antara teori aljabar dan logika fuzzy membuka peluang penelitian lanjutan, baik secara teoretis maupun aplikatif.

Proses penyusunan skripsi ini tidak lepas dari doa, bantuan, bimbingan, motivasi dan peran dari banyak pihak. Sehingga penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Prof. Dr. Musahadi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
2. Ibu Any Muanalifah, M.Si., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika, dan Bapak Prihadi Kurniawan, M.Sc., selaku Sekretaris Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.

3. Ibu Dinni Rahma Oktaviani, M.Si., selaku Dosen Pembimbing, atas segala arahan, bimbingan, dan koreksi yang sangat berarti dalam penyusunan skripsi ini.
4. Ibu Seftina Diyah Miasary, S.Si., M.Sc., selaku Wali Dosen, yang selama ini telah memberikan bimbingan, motivasi, dan perhatian selama masa perkuliahan.
5. Seluruh dosen Program Studi Matematika yang telah membekali penulis dengan ilmu selama masa perkuliahan.
6. Kedua orang tua tercinta dan tersayang, yang senantiasa memberikan doa, arahan, semangat, serta motivasi agar penulis dimudahkan dalam segala urusan, baik dunia maupun akhirat. Terima kasih atas segala pengorbanan, dukungan, dan kasih sayang yang tiada henti, sejak awal masa perkuliahan hingga terselesaikannya penyusunan skripsi ini.
7. Kedua saudara kandung dan keluarga besar, yang telah memberikan semangat selama masa perkuliahan hingga terselesaikannya penyusunan skripsi ini.
8. Titisari Azizah Wijayanti, S.Mat., selaku teman sekelas, sejurusan, dan sepembimbing, yang telah banyak membantu dan memberikan arahan dalam menghadapi berbagai kesulitan selama masa perkuliahan hingga terselesaikannya skripsi ini.
9. Frishca Agustin Clarissa, S.Mat., selaku teman sekelas, sejurusan, teman berbagi waktu luang, dan tempat bercerita, yang selalu memberikan arahan dan membagikan pengalaman

selalu memberikan arahan dan membagikan pengalaman selama masa perkuliahan di Semarang. Terima kasih atas kebersamaan, telah menemani ke mana pun, serta membantu dalam menghadapi berbagai kesulitan, baik dalam urusan perkuliahan maupun di luar perkuliahan.

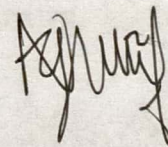
10. Teman-teman selama masa perkuliahan, serta rekan satu tempat tinggal. Terima kasih atas segala bantuan, dukungan, dan kebaikan yang telah diberikan selama menjalani perkuliahan.

Semoga kebaikan semuanya menjadi amal ibadah yang diterima dan mendapat pahala yang berlimpah dari Allah SWT. Aamiin.

Atas segala kekurangan dan kelemahan dalam skripsi ini penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun. Semoga karya tulis yang sederhana ini dapat menjadi bacaan yang bermanfaat dan dapat dikembangkan bagi peneliti-peneliti selanjutnya. Wassalamu'alaikum Warrahmatullahi Wabarakatuh.

Semarang, 10 Juni 2025

Penulis



Uli Roihanatuni'mah

NIM. 21080460942

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	ii
PENGESAHAN	iii
NOTA PEMBIMBING I	iv
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Tujuan Penelitian	2
C. Tinjauan Pustaka	3
D. Metode Penelitian	4
E. Sistematika Penulisan	5
BAB II LANDASAN PUSTAKA	7
A. Grup	7
B. Subgrup	10
C. Koset	11
D. Himpunan Fuzzy	13
E. Subgrup fuzzy	16
F. Koset pada subgrup fuzzy	19
G. Himpunan level subset fuzzy A	27
H. Koset Kiri dan Kanan pada Subgrup fuzzy- (λ, μ)	37
BAB III Hasil dan Pembahasan	40
A. Sifat koset kiri dan koset kanan pada subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G	40
B. Koset tengah pada subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G	62
BAB IV Kesimpulan dan Saran	68
A. Kesimpulan	68
B. Saran	70
DAFTAR PUSTAKA	71
DAFTAR RIWAYAT HIDUP	74

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Ketidakpastian merupakan salah satu karakteristik yang sering muncul dalam berbagai persoalan kehidupan nyata, terutama saat melakukan pengelompokan terhadap objek-objek yang memiliki ciri-ciri tidak tegas. Untuk mempresentasikan ketidakpastian tersebut, Zadeh pada tahun 1965 memperkenalkan konsep himpunan fuzzy, yaitu himpunan yang memungkinkan setiap elemen memiliki derajat keanggotaan dalam rentang nilai kontinu $[0, 1]$. Penerapan himpunan fuzzy sangat beragam, diantaranya adalah penelitian yang berjudul *Penerapan Metode Fuzzy Sugeno Untuk Menentukan Harga Jual Sepeda Motor Bekas* (Agustin et al., 2016), *Penerapan Fuzzy Mamdani Untuk Sistem Pendukung Keputusan Pemilihan Laptop* (Ikhwan et al., 2019), dan *Penerapan Metode Fuzzy Tsukamoto Dalam Diagnosa Penyakit Demam Berdarah* (Kurniawati & Efendi, 2020).

Dengan ada banyaknya penerapan himpunan fuzzy, menyebabkan banyak peneliti yang telah meneliti himpunan fuzzy dari berbagai cabang matematika, termasuk struktur aljabar, seperti grup. Dalam konteks ini, Rosenfeld memperkenalkan konsep subgrup fuzzy pada tahun 1971 sebagai himpunan fuzzy yang dibentuk dari semesta grup dengan memenuhi sifat-sifat dasar grup dalam bentuk fuzzy. Konsep subgrup fuzzy yang diperkenalkan oleh Rosenfeld dikembangkan oleh beberapa peneliti, diantaranya adalah *Subgrup Fuzzy* (λ, μ) (Li et al.,

2013), *Image (Pre-image) Homomorfisme Interior Subgrup Fuzzy* (Abdurrahman, S. 2018), *Interior Subgrup ω -Fuzzy* (Abdurrahman, S. 2021), dan *A new approach to fuzzy group theory using (α, β) -Pythagorean fuzzy sets* (Bhunia & Ghorai, 2021) . Penelitian ini akan berfokus pada subgrup fuzzy- (λ, μ) , dimana menggunakan dua paramater λ dan μ untuk mengatur fleksibilitas derajat keanggotaan elemen terhadap subgrup.

Dalam teori grup klasik, dikenal konsep koset kiri dan koset kanan yang berperan penting dalam memahami partisi grup terhadap subgrup. Koset membantu mengelompokkan elemen-elemen grup berdasarkan subgrup tertentu. Konsep ini akan memunculkan berbagai tantangan baru karena sifat keanggotaan yang tidak lagi biner ketika masuk dalam kerangka fuzzy. Beberapa kajian sebelumnya telah dibahas terkait struktur koset pada subgrup fuzzy seperti oleh Kandasamy (2003). Namun, kajian mengenai koset pada subgrup fuzzy (λ, μ) masih sangat terbatas. Khususnya, sifat-sifat koset kiri, koset kanan, dan koset tengah dalam struktur fuzzy (λ, μ) belum banyak dijelaskan maupun dikembangkan secara sistematis dalam literatur. Oleh karena itu, peneliti ingin fokus mengkaji lebih lanjut terkait sifat-sifat koset kanan dan koset kiri , serta membangun definisi dan karakteristik koset tengah dalam subgrup fuzzy- (λ, μ) .

B. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah

1. Mengetahui sifat-sifat koset kanan dan koset kiri pada subgrup fuzzy- (λ, μ) .

2. Mengetahui konstruksi koset tengah pada subgrup fuzzy- (λ, μ) .
3. Mengetahui sifat-sifat koset tengah pada subgrup fuzzy- (λ, μ) .

C. Tinjauan Pustaka

Pada penelitian ini, artikel berjudul *A Study of (λ, μ) -Fuzzy Subgroup* oleh Li, Wang, dan Yang (2013) menjadi rujukan utama. Artikel ini mengkaji pengembangan dari subgrup fuzzy dengan memperkenalkan dua parameter, yaitu λ dan μ , dalam struktur grup fuzzy. Penambahan parameter ini memberikan batasan nilai keanggotaan dalam menentukan keanggotaan suatu elemen terhadap subgrup fuzzy. Artikel ini menjadi dasar utama dalam mengembangkan teori koset kiri, koset kanan, dan koset tengah fuzzy- (λ, μ) .

Penelitian ini juga mengacu pada teori dasar himpunan fuzzy yang pertama kali diperkenalkan oleh Zadeh (1965). Dalam bukunya, Zadeh memperkenalkan ide bahwa suatu elemen dapat memiliki derajat keanggotaan dalam interval $[0, 1]$, bukan hanya keanggotaan biner seperti pada himpunan klasik. Konsep ini menjadi dasar dalam pembentukan subgrup fuzzy dan operasinya dalam struktur grup. Selain itu, buku *Fuzzy Theory and Applications* oleh Kandasamy digunakan sebagai referensi tambahan yang membahas berbagai jenis koset fuzzy dan struktur aljabar fuzzy secara umum. Buku ini memberikan definisi dan contoh koset fuzzy kiri, kanan, dan tengah dalam grup fuzzy.

Untuk memperkuat pemahaman mengenai struktur grup, subgrup, dan koset dalam aljabar klasik, digunakan buku *Struktur*

Aljabar I oleh Aisah (2018) dan *Aljabar Abstrak* oleh Lolang (2013). Buku-buku tersebut menjadi rujukan penting dalam menjelaskan sifat-sifat dasar grup dan pembentukan koset dalam konteks deterministik, yang kemudian diperluas ke dalam konsep fuzzy. Selain itu, digunakan pula buku *A Course in Group Theory* oleh J.F. Humphreys (1996) sebagai pendukung pemahaman lebih lanjut mengenai teori grup, termasuk konsep grup normal, koset, dan partisi grup, yang menjadi kerangka penting sebelum beralih ke konsep fuzzy.

Dengan merujuk pada sumber-sumber tersebut, penelitian ini menggabungkan teori klasik grup dan subgrup dengan konsep fuzzy untuk membentuk landasan yang kuat dalam membahas koset pada subgrup fuzzy- (λ, μ) .

D. Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, digunakan metode sebagai berikut

1. Meninjau jurnal dan buku-buku tentang sifat, definisi himpunan fuzzy dan subgrup fuzzy.
2. Mengkaji jurnal tentang sifat koset kanan dan koset kiri pada subgrup fuzzy- (λ, μ) yang bersumber dari jurnal "*A Study of (λ, μ) Subgroup fuzzy*".
3. Menganalisis pendefinisian, teorema-teorema, serta pembuktian teorema terkait dengan koset kanan dan koset kiri subgrup fuzzy (λ, μ) .
4. Mengkontruksi pendefinisian koset tengah pada subgrup fuzzy (λ, μ) .

5. Membuat teorema koset tengah pada subgrup fuzzy (λ, μ) berdasarkan pada pendefinisian yang telah ditetapkan.

E. Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini dibagi ke dalam empat bab utama, yang masing-masing terdiri dari beberapa subbab untuk memudahkan pembaca dalam memahami isi dan alur penelitian. Adapun sistematika penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menyajikan latar belakang permasalahan, tujuan penelitian, serta metode penelitian. Selain itu, ditambahkan pula tinjauan pustaka secara umum dan sistematika penulisan skripsi.

2. BAB II LANDASAN PUSTAKA

Bab ini memuat kajian teori-teori yang relevan serta hasil penelitian terdahulu. Kajian ini mencakup pengertian dan definisi dasar mengenai himpunan fuzzy, grup, subgrup fuzzy, serta teori terkait lainnya yang menjadi dasar dalam pembahasan skripsi.

3. BAB III HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Bab ini merupakan inti dari penelitian, yang membahas dan menganalisis koset kiri, koset kanan, dan koset tengah pada subgrup fuzzy- (λ, μ) . Dalam bab ini ditampilkan pula contoh, definisi, proposisi, dan pembuktian sifat-sifat koset fuzzy, baik secara simbolik maupun numerik, serta pengembangan dari struktur fuzzy klasik.

4. BAB IV PENUTUP

Bab terakhir berisi kesimpulan dari hasil penelitian yang telah diperoleh, serta saran untuk penelitian selanjutnya yang dapat dikembangkan dari hasil yang dicapai dalam penelitian ini.

BAB II

LANDASAN PUSTAKA

A. Grup

Sebelum membahas sebuah grup, diketahui terlebih dahulu terkait definisi operasi biner.

Definisi 2.1.1 (Operasi biner, e.g (Holmes, 2018))

Misalkan T adalah himpunan tak kosong. Suatu operasi biner pada T adalah suatu fungsi

$$* : T \times T \rightarrow T$$

dengan

$$T \times T = \{(t, u) \mid t, u \in T\}$$

menyatakan himpunan semua pasangan terurut yang elemennya berasal dari himpunan T .

Artinya, untuk setiap $t, u \in T$, hasil operasi $t*u$ juga merupakan elemen dalam T . Sifat ini disebut tertutup terhadap operasi.

Contoh 2.1.2 Misalkan $T = \mathbb{Z}$ dan operasi yang digunakan adalah penjumlahan, maka

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner karena memenuhi

1. $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan tak kosong ($\mathbb{Z} \neq \emptyset$)

Karena ada $1 \in \mathbb{Z}$ maka $\mathbb{Z} \neq \emptyset$

2. Bersifat tertutup

Ambil sembarang $t, u \in \mathbb{Z}$. Misal $t = 3, u = 5$, maka

$$t + u = 8 \in \mathbb{Z}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh bahwa operasi penjumlahan pada bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner.

Definisi 2.1.3 (Grup, e.g (Holmes, 2018))

Sebuah himpunan tak kosong G bersama dengan operasi biner $$, dikatakan membentuk suatu grup $(G, *)$ jika memenuhi kondisi - kondisi berikut.*

1. Bersifat Asosiatif

Suatu operasi biner $$ pada G dikatakan bersifat asosiatif jika untuk setiap $t, u, v \in G$, berlaku : $(t * u) * v = t * (u * v)$.*

2. Terdapat elemen identitas

*Terdapat tunggal elemen identitas e sehingga untuk setiap $t \in G$, diperoleh $t * e = e * t = t$.*

3. Setiap elemen memiliki invers

*Untuk setiap elemen t di G , terdapat t^{-1} di G sedemikian sehingga berlaku $t^{-1} * t = e = t * t^{-1}$, di mana e adalah elemen identitas.*

Contoh 2.1.4 Untuk memahami Definisi 2.1.3, diberikan contoh sederhana, yaitu himpunan bilangan bulat modulo 4 ($\mathbb{Z}_4$) dengan operasi penjumlahan modulo 4 ($+$) membentuk sebuah grup ($\mathbb{Z}_4, +$). Himpunan $\mathbb{Z}_4$ merupakan himpunan semua kelas

kongruensi modulo 4 yaitu,

$$\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$$

Hal ini dapat dibuktikan dengan melihat bahwa

1. Operasi penjumlahan $(+_4)$ di $\mathbb{Z}_4$ bersifat asosiatif
Ambil sembarang $t, u, v \in \mathbb{Z}_4$. Akan ditunjukkan bahwa

$$((t + u) \bmod 4) + v \equiv t + ((u + v) \bmod 4)$$

Karena penjumlahan bilangan bulat $(\mathbb{Z})$ bersifat asosiatif, maka penjumlahan dalam $\mathbb{Z}_4$ dengan modulo 4 $(+_4)$ juga bersifat asosiatif.

2. Terdapat elemen identitas di himpunannya
Elemen identitas dalam $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ adalah $\bar{0}$, karena untuk setiap $t \in \mathbb{Z}_4$, berlaku :

$$t +_4 \bar{0} = \bar{0} +_4 t = t$$

3. Setiap elemen memiliki invers di himpunannya
Diketahui elemen identitas e pada $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ adalah $\bar{0}$, maka

1. $\bar{0}^{-1} = \bar{0}$, karena $\bar{0} +_4 \bar{0} = \bar{0} = \bar{0} +_4 \bar{0}$
2. $\bar{1}^{-1} = \bar{3}$, karena $\bar{1} +_4 \bar{3} = \bar{0} = \bar{3} +_4 \bar{1}$
3. $\bar{2}^{-1} = \bar{2}$, karena $\bar{2} +_4 \bar{2} = \bar{0} = \bar{2} +_4 \bar{2}$
4. $\bar{3}^{-1} = \bar{1}$, karena $\bar{3} +_4 \bar{1} = \bar{0} = \bar{1} +_4 \bar{3}$

Jadi, Karena memenuhi sifat-sifat grup, maka $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ merupakan grup.

B. Subgrup

Definisi 2.2.1 (Subgrup, e.g (Lolang, E. 2013))

Diketahui $(G, *)$ merupakan suatu grup, serta H merupakan himpunan tak kosong dengan $H \subseteq G$. $(H, *)$ merupakan subgrup dari G apabila memenuhi semua aksioma grup.

Contoh 2.2.2 Himpunan $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{Z}_4, +_4)$. Hal ini dapat dibuktikan sesuai pendefinisian grup.

1. Asosiatif

Operasi penjumlahan pada $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ bersifat asosiatif. Karena $\{\bar{0}, \bar{2}\} \subseteq (\mathbb{Z}_4, +_4)$, maka penjumlahan pada $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ juga bersifat asosiatif.

2. Memiliki elemen identitas.

Elemen identitas dalam $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ adalah $\bar{0}$, dan karena $\bar{0} \in \{\bar{0}, \bar{2}\}$, maka himpunan ini juga memiliki elemen identitas.

3. Setiap elemen memiliki invers.

- Invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$ sendiri (karena $\bar{0} +_4 \bar{0} = \bar{0}$)
- Invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{2}$ (karena $\bar{2} +_4 \bar{2} = \bar{0}$)

Jadi, Karena semua aksioma grup terpenuhi, maka :

$$(\{\bar{0}, \bar{2}\}, +_4)$$

adalah subgrup dari $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.

C. Koset

Definisi 2.3.1 (Koset, e.g (Holmes, 2018))

Misalkan G merupakan grup, H merupakan subgrup G dan diberikan sebarang elemen $g \in G$, maka $Hg = \{hg|h \in H\}$ dikatakan sebagai koset kanan dari H yang memuat elemen g dan $gH = \{gh|h \in H\}$ dikatakan sebagai koset kiri dari H yang memuat elemen g .

Contoh 2.3.2 Misalkan $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ adalah grup G dan $H = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan subgrup sehingga diperoleh,

1. Koset Kiri

- a. Untuk $g = \bar{0} \in G$ yang dimana $gH = \{gh \mid h \in H\}$,
maka $gH = \bar{0}H = H = \{\bar{0} +_4 \bar{0}, \bar{0} +_4 \bar{2}\} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$
- b. Untuk $g = \bar{1} \in G$ yang dimana $gH = \{gh \mid h \in H\}$,
maka $gH = \bar{1}H = \{\bar{1} +_4 \bar{0}, \bar{1} +_4 \bar{2}\} = \{\bar{1}, \bar{3}\}$
- c. Untuk $g = \bar{2} \in G$ yang dimana $gH = \{gh \mid h \in H\}$,
maka $gH = \bar{2}H = \{\bar{2} +_4 \bar{0}, \bar{2} +_4 \bar{2}\} = \{\bar{2}, \bar{0}\}$
- d. Untuk $g = \bar{3} \in G$ yang dimana $gH = \{gh \mid h \in H\}$,
maka $gH = \bar{3}H = \{\bar{3} +_4 \bar{0}, \bar{3} +_4 \bar{2}\} = \{\bar{3}, \bar{1}\}$

Berdasarkan hasil perhitungan sebelumnya, diperoleh bahwa bentuk koset kiri pada $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ yaitu :

- $\bar{0}H = \{\bar{0}, \bar{2}\}$

- $\bar{1}H = \{\bar{1}, \bar{3}\}$
- $\bar{2}H = \{\bar{2}, \bar{0}\}$
- $\bar{3}H = \{\bar{3}, \bar{1}\}$

2. Koset Kanan

- a. Untuk $g = \bar{0} \in G$ yang dimana $Hg = \{hg \mid h \in H\}$,
maka $Hg = H\bar{0} = \{\bar{0} +_4 \bar{0}, \bar{2} +_4 \bar{0}\} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$
- b. Untuk $g = \bar{1} \in G$ yang dimana $Hg = \{hg \mid h \in H\}$,
maka $Hg = H\bar{1} = \{\bar{0} +_4 \bar{1}, \bar{2} +_4 \bar{1}\} = \{\bar{1}, \bar{3}\}$
- c. Untuk $g = \bar{2} \in G$ yang dimana $Hg = \{hg \mid h \in H\}$,
maka $Hg = H\bar{2} = \{\bar{0} +_4 \bar{2}, \bar{2} +_4 \bar{2}\} = \{\bar{2}, \bar{0}\}$
- d. Untuk $g = \bar{3} \in G$ yang dimana $Hg = \{hg \mid h \in H\}$,
maka $Hg = H\bar{3} = \{\bar{0} +_4 \bar{3}, \bar{2} +_4 \bar{3}\} = \{\bar{3}, \bar{1}\}$

Berdasarkan hasil perhitungan sebelumnya, diperoleh bahwa bentuk koset kanan pada $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ yaitu :

- $H\bar{0} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$
- $H\bar{1} = \{\bar{1}, \bar{3}\}$
- $H\bar{2} = \{\bar{2}, \bar{0}\}$

- $H\bar{3} = \{\bar{3}, \bar{1}\}$

D. Himpunan Fuzzy

Definisi 2.4.1 (*Himpunan fuzzy, e.g (Rindengan & Langi, 2019)*)

Misalkan X adalah himpunan tak kosong. Suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ atas X merupakan sekumpulan pasangan terurut $(x, A(x))$, di mana x merupakan elemen dari himpunan tak kosong X , dan $A(x)$ menunjukkan derajat keanggotaan elemen x terhadap $\tilde{A}$. Oleh karena itu, himpunan fuzzy tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut sebagai

$$\tilde{A} = \{(x, A(x)) \mid x \in X\}.$$

Fungsi keanggotaannya dinotasikan dengan

$$A(x) : X \rightarrow [0, 1], \quad \text{untuk setiap } x \in X.$$

Artinya, $A(x)$ adalah fungsi keanggotaan dengan setiap elemen $x \in X$ dipetakan ke bilangan real antara 0 dan 1.

Contoh 2.4.2 Misalkan X adalah himpunan tinggi badan manusia yang didefinisikan sebagai berikut $X = \{160, 170, 180, 190, 200\}$. Didefinisikan sebuah himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dengan label "tinggi" pada semesta X , dimana fungsi keanggotaan $A(x)$ diberikan oleh

$$A(160) = 0.5,$$

$$A(170) = 0.7,$$

$$A(180) = 0.8,$$

$$A(190) = 0.9,$$

$$A(200) = 1.$$

Maka, himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dapat dituliskan sebagai
 $\tilde{A} = \{(160, 0.5), (170, 0.7), (180, 0.8), (190, 0.9), (200, 1.0)\}.$

Definisi 2.4.3 (Operasi Dasar Himpunan Fuzzy, e.g (Zadeh, 1965))

Pada himpunan fuzzy, operasi gabungan ($\vee$) dan irisan ($\wedge$) didefinisikan untuk setiap $x, y \in [0, 1]$ sebagai

$$x \vee y = \max\{x, y\}, \quad x \wedge y = \min\{x, y\}.$$

Setelah memahami operasi dasar pada nilai fuzzy, kita dapat menggunakannya untuk mendefinisikan gabungan atau irisan dari dua himpunan fuzzy.

Definisi 2.4.4 (Operasi Gabungan Himpunan Fuzzy, e.g (Zadeh, 1965))

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah dua himpunan fuzzy dalam semesta X , dengan fungsi keanggotaan masing-masing diberikan oleh $A(x)$ dan $B(x)$ untuk setiap $x \in X$. Gabungan dari $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dinotasikan dengan $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, adalah himpunan fuzzy baru yang disebut $\tilde{C}$ yang didefinisikan sebagai

$$\tilde{C} = \{(x, C(x)) \mid x \in X\}$$

dengan fungsi keanggotaan

$$C(x) = A(x) \vee B(x).$$

Jadi, derajat keanggotaan elemen x pada gabungan himpunan fuzzy $\tilde{C}$ ditentukan oleh nilai terbesar antara keanggotaan x pada $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$.

Contoh 2.4.5 Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ adalah semesta pembicaraan, dan diberikan himpunan fuzzy, yaitu $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\tilde{A} = \{(\bar{0}, 1.0), (\bar{1}, 0.9), (\bar{2}, 0.2), (\bar{3}, 0.5)\},$$

$$\tilde{B} = \{(\bar{0}, 0.1), (\bar{1}, 0.7), (\bar{2}, 0.8), (\bar{3}, 0.4)\}.$$

Gabungan dari kedua himpunan fuzzy tersebut, yaitu $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$, didefinisikan dengan menggunakan operasi maksimum pada fungsi keanggotaan di setiap elemen $x \in \mathbb{Z}_4$, sebagai berikut

$$1. C(\bar{0}) = A(\bar{0}) \vee B(\bar{0}) = 1.0 \vee 0.1 = 1.0,$$

$$2. C(\bar{1}) = A(\bar{1}) \vee B(\bar{1}) = 0.9 \vee 0.7 = 0.9,$$

$$3. C(\bar{2}) = A(\bar{2}) \vee B(\bar{2}) = 0.2 \vee 0.8 = 0.8,$$

$$4. C(\bar{3}) = A(\bar{3}) \vee B(\bar{3}) = 0.5 \vee 0.4 = 0.5.$$

Dengan demikian, diperoleh hasil gabungan sebagai berikut

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(\bar{0}, 1.0), (\bar{1}, 0.9), (\bar{2}, 0.8), (\bar{3}, 0.5)\}.$$

Definisi 2.4.6 (Operasi Irisan Himpunan Fuzzy, e.g (Zadeh, 1965)) Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah dua himpunan fuzzy dalam semesta X , dengan fungsi keanggotaan masing-masing diberikan oleh $A(x)$ dan $B(x)$ untuk setiap $x \in X$. Irisan dari $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dinotasikan dengan $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, adalah himpunan fuzzy baru yang disebut $\tilde{C}$ yang didefinisikan sebagai

$$\tilde{C} = \{(x, C(x)) \mid x \in X\}$$

dengan fungsi keanggotaan

$$C(x) = A(x) \wedge B(x)$$

Artinya, derajat keanggotaan elemen x pada irisan $\tilde{C}$ ditentukan oleh nilai terendah dari fungsi keanggotaan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$. Operasi ini menghasilkan himpunan fuzzy terbesar yang hanya mencakup elemen-elemen yang terdapat pada kedua himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$.

Contoh 2.4.7 Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ adalah semesta pembicaraan, dan diberikan himpunan fuzzy, yaitu $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$\tilde{A} = \{(\bar{0}, 1.0), (\bar{1}, 0.9), (\bar{2}, 0.2), (\bar{3}, 0.5)\},$$

$$\tilde{B} = \{(\bar{0}, 0.1), (\bar{1}, 0.7), (\bar{2}, 0.8), (\bar{3}, 0.4)\}.$$

Maka, fungsi keanggotaan hasil irisan yaitu $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ diperoleh dengan menghitung nilai minimum untuk setiap elemen sebagai berikut

$$1. C(\bar{0}) = A(\bar{0}) \wedge B(\bar{0}) = 1.0 \wedge 0.1 = 0.1,$$

$$2. C(\bar{1}) = A(\bar{1}) \wedge B(\bar{1}) = 0.9 \wedge 0.7 = 0.7,$$

$$3. C(\bar{2}) = A(\bar{2}) \wedge B(\bar{2}) = 0.2 \wedge 0.8 = 0.2,$$

$$4. C(\bar{3}) = A(\bar{3}) \wedge B(\bar{3}) = 0.5 \wedge 0.4 = 0.4.$$

Sehingga diperoleh

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(\bar{0}, 0.1), (\bar{1}, 0.7), (\bar{2}, 0.2), (\bar{3}, 0.4)\}.$$

E. Subgrup fuzzy

Definisi 2.5.1 (Subgrup fuzzy, e.g (Rosenfeld, A. 1971))

Misalkan G adalah sebuah grup. Suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada grup G disebut sebagai subgrup fuzzy apabila untuk setiap elemen x dan $y \in G$ memenuhi

1. $A(xy) \geq A(x) \wedge A(y)$, *dan*
2. $A(x^{-1}) \geq A(x)$.

Contoh 2.5.2 Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ merupakan grup dengan operasi penjumlahan dalam modulo 4 $(\mathbb{Z}_4, +_4)$. Dibentuk himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada $\mathbb{Z}_4$ adalah sebagai berikut

$$\tilde{A} = \{(0, 1), (1, 0.7), (2, 0.8), (3, 0.7)\},$$

akan ditunjukkan bahwa $\tilde{A}$ merupakan subgrup fuzzy.

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_4$ berlaku

1. $A(xy) \geq A(x) \wedge A(y)$.

Di bawah ini akan dijelaskan perhitungan untuk masing masing nilai $x, y \in \mathbb{Z}_4$ sebagai berikut

Tabel 2.1. Verifikasi Syarat Pertama Subgrup Fuzzy pada $(\mathbb{Z}_4, +_4)$

x	y	$A(x +_4 y)$	$A(x) \wedge A(y)$	$A(xy) \geq A(x) \wedge A(y)$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	1	1	$1 \geq 1$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	0,7	0,7	$0,7 \geq 0,7$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	0,8	0,8	$0,8 \geq 0,8$
$\bar{0}$	$\bar{3}$	0,7	0,7	$0,7 \geq 0,7$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	0,7	0,7	$0,7 \geq 0,7$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	0,8	0,7	$0,8 \geq 0,7$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	0,7	0,7	$0,7 \geq 0,7$
$\bar{1}$	$\bar{3}$	1	0,7	$1 \geq 0,7$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	0,8	0,8	$0,8 \geq 0,8$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	0,7	0,7	$0,7 \geq 0,7$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	1	0,8	$1 \geq 0,8$
$\bar{2}$	$\bar{3}$	0,8	0,7	$0,8 \geq 0,7$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	0,7	0,7	$0,7 \geq 0,7$
$\bar{3}$	$\bar{1}$	1	0,7	$1 \geq 0,7$
$\bar{3}$	$\bar{2}$	0,8	0,7	$0,8 \geq 0,7$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	0,8	0,7	$0,8 \geq 0,7$

Berdasarkan uraian di atas, terbukti bahwa syarat pertama berlaku untuk setiap elemen x dan y dalam $\mathbb{Z}_4$.

$$2. A(x^{-1}) \geq A(x)$$

Adapun invers dari masing-masing elemen dalam $\mathbb{Z}_4$ adalah sebagai berikut

$$A(\bar{0}^{-1}) = A(\bar{0}) = 1 \geq 1 = A(\bar{0}),$$

$$A(\bar{1}^{-1}) = A(\bar{3}) = 0.7 \geq 0.7 = A(\bar{1}),$$

$$A(\bar{2}^{-1}) = A(\bar{2}) = 0.8 \geq 0.8 = A(\bar{2}),$$

$$A(\bar{3}^{-1}) = A(\bar{1}) = 0.7 \geq 0.7 = A(\bar{3}).$$

Mengingat bahwa untuk semua elemen $x, y \in \mathbb{Z}_4$, berlaku hubungan $A(x^{-1}) = A(x)$, sehingga terpenuhi juga bahwa $A(x^{-1}) \geq A(x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_4$.

Dengan demikian, himpunan fuzzy $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy atas $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.

F. Koset pada subgrup fuzzy

Definisi 2.6.1 (Koset kiri subgrup fuzzy, e.g (Kandasamy, W. B. Vasantha., 2003))

Misalkan $\tilde{A}$ merupakan subgrup fuzzy dalam grup G , serta $a \in G$. Dinyatakan bahwa $a\tilde{A} = \{(x, (aA)(x)) \mid x \in G\}$, yang dimana, $(aA)(x)$ terdefinisi $(aA)(x) = A(a^{-1}x)$ untuk setiap $x \in G$. Pernyataan tersebut menyatakan bentuk koset kiri pada subgrup fuzzy terhadap elemen a dalam grup G .

Contoh 2.6.2 Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ merupakan sebuah grup dengan operasi penjumlahan modulo 4 ($\mathbb{Z}_4, +_4$). Dibentuk sebuah himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada $\mathbb{Z}_4$ sebagai berikut

$$\tilde{A} = \{(0, 1), (1, 0.7), (2, 0.8), (3, 0.7)\},$$

di mana $\tilde{A}$ merupakan sebuah subgrup fuzzy atas $\mathbb{Z}_4$.

Diberikan bahwa $a = \bar{1}$. Perhatikan bahwa

1. $(\bar{1}A)(\bar{0}) = A(\bar{1}^{-1} +_4 \bar{0}) = A(\bar{3}) = 0.7,$
2. $(\bar{1}A)(\bar{1}) = A(\bar{1}^{-1} +_4 \bar{1}) = A(\bar{0}) = 1,$
3. $(\bar{1}A)(\bar{2}) = A(\bar{1}^{-1} +_4 \bar{2}) = A(\bar{1}) = 0.7,$
4. $(\bar{1}A)(\bar{3}) = A(\bar{1}^{-1} +_4 \bar{3}) = A(\bar{2}) = 0.8.$

Jadi, $\bar{1}\tilde{A} = \{(\bar{0}, 0.7), (\bar{1}, 1), (\bar{2}, 0.7), (\bar{3}, 0.8)\}.$

Definisi 2.6.3 (Koset kanan subgrup fuzzy, e.g (Kandasamy, W. B. Vasantha., 2003))

Misalkan $\tilde{A}$ merupakan subgrup fuzzy dalam grup G , serta $a \in G$. Dinyatakan bahwa $\tilde{A}a = \{(x, (Aa)(x)) \mid x \in G\}$, yang dimana, $(Aa)(x)$ terdefinisi $(Aa)(x) = A(xa^{-1})$. Pernyataan tersebut menyatakan bentuk koset kanan dari subgrup fuzzy dalam grup G .

Contoh 2.6.4 Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ merupakan sebuah grup dengan operasi penjumlahan modulo 4 ($\mathbb{Z}_4, +_4$). Dibentuk sebuah himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada $\mathbb{Z}_4$ sebagai berikut

$$\tilde{A} = \{(0, 1), (1, 0.7), (2, 0.8), (3, 0.7)\},$$

di mana $\tilde{A}$ merupakan sebuah subgrup fuzzy atas $\mathbb{Z}_4$.

Diberikan bahwa $a = \bar{1}$. Perhatikan bahwa

1. $(A\bar{1})(\bar{0}) = A(\bar{0} +_4 (\bar{1}^{-1})) = A(\bar{3}) = 0.7,$
2. $(A\bar{1})(\bar{1}) = A(\bar{1} +_4 (\bar{1}^{-1})) = A(\bar{0}) = 1,$
3. $(A\bar{1})(\bar{2}) = A(\bar{2} +_4 (\bar{1}^{-1})) = A(\bar{1}) = 0.7,$
4. $(A\bar{1})(\bar{3}) = A(\bar{3} +_4 (\bar{1}^{-1})) = A(\bar{2}) = 0.8.$

Jadi, $\tilde{A}\bar{1} = \{(\bar{0}, 0.7), (\bar{1}, 1), (\bar{2}, 0.7), (\bar{3}, 0.8)\}.$

Definisi 2.6.5 (*Koset tengah subgrup fuzzy, e.g (Kandasamy, W. B. Vasantha., 2003)*)

Misalkan $\tilde{A}$ merupakan subgrup fuzzy dalam grup G , serta $a, b \in G$. Dinyatakan bahwa $a\tilde{A}b = \{(x, (aAb)(x)) \mid x \in G\}$, yang dimana, $(aAb)(x)$ terdefinisi $(aAb)(x) = A(a^{-1}xb^{-1})$.

Pernyataan tersebut menyatakan bentuk koset tengah dalam subgrup fuzzy terhadap grup G .

Contoh 2.6.6 Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ merupakan sebuah grup dengan operasi penjumlahan modulo 4 ($\mathbb{Z}_4, +_4$). Dibentuk sebuah himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada $\mathbb{Z}_4$ sebagai berikut

$$\tilde{A} = \{(0, 1), (1, 0.7), (2, 0.8), (3, 0.7)\},$$

di mana $\tilde{A}$ merupakan sebuah subgrup fuzzy atas $\mathbb{Z}_4$.

Diberikan bahwa $a = \bar{1}$ serta $b = \bar{2}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (\bar{1}A\bar{2})(\bar{0}) &= A(\bar{1}^{-1} +_4 \bar{0} +_4 \bar{2}^{-1}) \\ &= A(\bar{3} +_4 \bar{0} +_4 \bar{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A(\bar{1}) \\
&= 0.7, \\
(\bar{1}A\bar{2})(\bar{1}) &= A(\bar{1}^{-1} +_4 \bar{1} +_4 \bar{2}^{-1}) \\
&= A(\bar{3} +_4 \bar{1} +_4 \bar{2}) \\
&= A(\bar{2}) \\
&= 0.8, \\
(\bar{1}A\bar{2})(\bar{2}) &= A(\bar{1}^{-1} +_4 \bar{2} +_4 \bar{2}^{-1}) \\
&= A(\bar{3} +_4 \bar{2} +_4 \bar{2}) \\
&= A(\bar{3}) \\
&= 0.7, \\
(\bar{1}A\bar{2})(\bar{3}) &= A(\bar{1}^{-1} +_4 \bar{3} +_4 \bar{2}^{-1}) \\
&= A(\bar{3} +_4 \bar{3} +_4 \bar{2}) \\
&= A(\bar{0}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Jadi, diperoleh

$$\bar{1}\tilde{A}\bar{2} = \{(\bar{0}, 0.7), (\bar{1}, 0.8), (\bar{2}, 0.7), (\bar{3}, 1)\}.$$

Definisi 2.6.7 Subgrup Fuzzy (λ, μ) , *e.g* (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan G merupakan sebuah grup dengan elemen identitas e , serta diberikan parameter λ dan μ yang memenuhi $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$. Suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang didefinisikan dalam grup G dikatakan

sebagai subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G apabila dua ketentuan berikut terpenuhi untuk setiap elemen x dan $y \in G$ memenuhi

1. $A(xy) \vee \lambda \geq A(x) \wedge A(y) \wedge \mu$, dan
2. $A(x^{-1}) \vee \lambda \geq A(x) \wedge \mu$.

Contoh 2.6.8 Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ merupakan sebuah grup dengan operasi penjumlahan modulo 4 ($\mathbb{Z}_4, +_4$). Dibentuk sebuah himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada $\mathbb{Z}_4$ sebagai berikut

$$\tilde{A} = \{(0, 1), (1, 0.7), (2, 0.8), (3, 0.7)\},$$

di mana $\tilde{A}$ merupakan sebuah subgrup fuzzy $(0.4, 1)$ atas $\mathbb{Z}_4$.

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_4$ berlaku

1. $A(xy) \vee \lambda \geq A(x) \wedge A(y) \wedge \mu$.

Dibawah ini akan dijelaskan perhitungan untuk masing-masing nilai $x, y \in \mathbb{Z}_4$ sebagai berikut

Tabel 2.2. Verifikasi Syarat Pertama Subgrup Fuzzy- (λ, μ) pada $(\mathbb{Z}_4, +_4)$

x	y	$A(x +_4 y) \vee \lambda$	$A(x) \wedge A(y) \wedge \mu$	$A(xy) \geq A(x) \wedge A(y) \wedge \mu$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$1 \vee 0,4 = 1$	$1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$	$1 \geq 1$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$0,7 \vee 0,4 = 0,7$	$1 \wedge 0,7 \wedge 1 = 0,7$	$0,7 \geq 0,7$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$0,8 \vee 0,4 = 0,8$	$1 \wedge 0,8 \wedge 1 = 0,8$	$0,8 \geq 0,8$
$\bar{0}$	$\bar{3}$	$0,7 \vee 0,4 = 0,7$	$1 \wedge 0,7 \wedge 1 = 0,7$	$0,7 \geq 0,7$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$0,7 \vee 0,4 = 0,7$	$0,7 \wedge 1 \wedge 1 = 0,7$	$0,7 \geq 0,7$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$0,8 \vee 0,4 = 0,8$	$0,7 \wedge 0,7 \wedge 1 = 0,7$	$0,8 \geq 0,7$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$0,7 \vee 0,4 = 0,7$	$0,7 \wedge 0,8 \wedge 1 = 0,7$	$0,7 \geq 0,7$
$\bar{1}$	$\bar{3}$	$1 \vee 0,4 = 1$	$0,7 \wedge 0,7 \wedge 1 = 0,7$	$1 \geq 0,7$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$0,8 \vee 0,4 = 0,8$	$0,8 \wedge 1 \wedge 1 = 0,8$	$0,8 \geq 0,8$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$0,7 \vee 0,4 = 0,7$	$0,8 \wedge 0,7 \wedge 1 = 0,7$	$0,7 \geq 0,7$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$1 \vee 0,4 = 1$	$0,8 \wedge 0,8 \wedge 1 = 0,8$	$1 \geq 0,8$
$\bar{2}$	$\bar{3}$	$0,7 \vee 0,4 = 0,7$	$0,8 \wedge 0,7 \wedge 1 = 0,7$	$0,7 \geq 0,7$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$0,7 \vee 0,4 = 0,7$	$0,7 \wedge 1 \wedge 1 = 0,7$	$0,7 \geq 0,7$
$\bar{3}$	$\bar{1}$	$1 \vee 0,4 = 1$	$0,7 \wedge 0,7 \wedge 1 = 0,7$	$1 \geq 0,7$
$\bar{3}$	$\bar{2}$	$0,7 \vee 0,4 = 0,7$	$0,7 \wedge 0,8 \wedge 1 = 0,7$	$0,7 \geq 0,7$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$0,8 \vee 0,4 = 0,8$	$0,7 \wedge 0,7 \wedge 1 = 0,7$	$0,8 \geq 0,7$

Berdasarkan uraian di atas, terbukti bahwa syarat pertama berlaku untuk setiap elemen x dan y dalam $\mathbb{Z}_4$.

$$2. A(x^{-1}) \vee \lambda \geq A(x) \wedge \mu$$

Diketahui Adapun invers dari masing-masing elemen dalam $\mathbb{Z}_4$ adalah sebagai berikut

$$A(\bar{0}^{-1}) = A(\bar{0}) = 1 \geq 1 = A(\bar{0}),$$

$$A(\bar{1}^{-1}) = A(\bar{3}) = 0.7 \geq 0.7 = A(\bar{1}),$$

$$A(\bar{2}^{-1}) = A(\bar{2}) = 0.8 \geq 0.8 = A(\bar{2}),$$

$$A(\bar{3}^{-1}) = A(\bar{1}) = 0.7 \geq 0.7 = A(\bar{3}).$$

Karena untuk setiap elemen $x, y \in \mathbb{Z}_4$, berlaku bahwa $A(x^{-1}) = A(x)$, maka langkah pembuktian syarat kedua dapat disusun sebagai berikut.

a. Perhitungan pada sisi kiri :

$$A(\bar{0}^{-1}) \vee \lambda = A(\bar{0}) \vee \lambda = 1 \vee 0.4 = 1.$$

Perhitungan pada sisi kanan :

$$A(\bar{0}) \wedge \mu = 1 \wedge 1 = 1.$$

Diperoleh, $A(\bar{0}) \vee \lambda \geq A(\bar{0}) \wedge \mu$

b. Perhitungan pada sisi kiri :

$$A(\bar{1}^{-1}) \vee \lambda = A(\bar{3}) \vee \lambda = 0.7 \vee 0.4 = 0.7.$$

Perhitungan pada sisi kanan :

$$A(\bar{1}) \wedge \mu = 0.7 \wedge 1 = 0.7.$$

$$\text{Diperoleh, } A(\bar{1}^{-1}) \vee \lambda \geq A(\bar{1}) \wedge \mu$$

c. Perhitungan pada sisi kiri :

$$A(\bar{2}^{-1}) \vee \lambda = A(2) \vee \lambda = 0.8 \vee 0.4 = 0.8.$$

Perhitungan pada sisi kanan :

$$A(2) \wedge \mu = 0.8 \wedge 1 = 0.8.$$

$$\text{Diperoleh, } A(\bar{2}^{-1}) \vee \lambda \geq A(2) \wedge \mu$$

d. Perhitungan pada sisi kiri :

$$A(\bar{3}^{-1}) \vee \lambda = A(\bar{1}) \vee \lambda = 0.7 \vee 0.4 = 0.7.$$

Perhitungan pada sisi kanan :

$$A(\bar{3}) \wedge \mu = 0.7 \wedge 1 = 0.7$$

$$\text{Diperoleh, } A(\bar{3}^{-1}) \vee \lambda \geq A(\bar{3}) \wedge \mu.$$

Dengan kata lain, untuk setiap elemen x dalam $\mathbb{Z}_4$, syarat subgrup fuzzy (λ, μ) untuk $A(x^{-1}) \vee \lambda \geq A(x) \wedge \mu$ terpenuhi.

Dengan demikian, himpunan fuzzy $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy- (λ, μ) pada $\mathbb{Z}_4$.

G. Himpunan level subset fuzzy A

Definisi 2.7.1 (*Himpunan level, e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013)*)

Misalkan terdapat himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dalam grup G , serta nilai α berada dalam rentang $[0, 1]$. Maka, himpunan yang didefinisikan sebagai $\tilde{A}_\alpha = \{x \in G \mid A(x) \geq \alpha\}$ disebut sebagai himpunan level α dari $\tilde{A}$.

Contoh 2.7.2 Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ merupakan sebuah grup yang dibentuk dengan operasi penjumlahan modulo 4 ($\mathbb{Z}_4, +_4$). Dibentuk sebuah himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada $\mathbb{Z}_4$ sebagai berikut

$$\tilde{A} = \{(0, 1), (1, 0.7), (2, 0.8), (3, 0.7)\},$$

dengan $\alpha = 0.5$.

Dengan demikian, berdasarkan definisi, diperoleh bahwa $\tilde{A}_\alpha = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}\}$

$\tilde{A}_\alpha$ memiliki sifat-sifat sebagai berikut, yang dijelaskan melalui proposisi berikut:

Proposisi 2.7.3 (*e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013)*)

Suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ atas grup G dikatakan sebagai subgrup fuzzy jika dan hanya jika setiap $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$ merupakan subgrup dari G untuk setiap $\alpha \in (0, 1]$.

Bukti.

($\Rightarrow$) Diketahui bahwa $\tilde{A}$ adalah suatu subgrup fuzzy. Akan ditunjukkan bahwa $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$ merupakan subgrup dari G untuk setiap $\alpha \in (0, 1]$.

Ambil sembarang $\alpha \in (0, 1]$ dan $x, y \in A_\alpha$. Berdasarkan Definisi 2.7.1, diperoleh bahwa $A(x) \geq \alpha$ dan $A(y) \geq \alpha$. Oleh karena itu, $xy \in \tilde{A}_\alpha$, sehingga memenuhi syarat pertama subgrup fuzzy.

Terdapat elemen $x \in \tilde{A}_\alpha$, sehingga berlaku $A(x^{-1}) \geq A(x) \geq \alpha$. Dengan demikian, $x^{-1} \in \tilde{A}_\alpha$.

Karena terdapat elemen invers, syarat kedua subgrup telah terpenuhi. Berdasarkan pembuktian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$ merupakan subgrup dari G untuk setiap $\alpha \in (0, 1]$.

($\Leftarrow$) Diketahui bahwa $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$ merupakan subgrup untuk setiap $\alpha \in (0, 1]$. Akan ditunjukkan bahwa $\tilde{A}$ merupakan subgrup fuzzy.

Ambil sembarang $x, y \in G$. Berdasarkan Definisi 2.7.1, diperoleh bahwa $A(x) \geq \alpha$ dan $A(y) \geq \alpha$. Karena $\tilde{A}_\alpha$ merupakan subgrup, berlaku bahwa $xy \in \tilde{A}_\alpha$, yang berarti bahwa $A(xy) \geq \alpha$. Dengan $\alpha \in (0, 1]$, syarat pertama subgrup fuzzy telah terpenuhi.

Misalkan, $A(x) = \alpha$. Dengan $x \in \tilde{A}_\alpha$ serta $\tilde{A}_\alpha$ merupakan subgrup, terdapat sebuah elemen invers x yaitu x^{-1} , sehingga $x^{-1} \in \tilde{A}_\alpha$. Oleh karena itu,

$$A(x^{-1}) \geq \alpha$$

$$\Leftrightarrow A(x^{-1}) \geq A(x).$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $\tilde{A}$ adalah sebuah subgrup fuzzy. Melalui pembuktian dua arah, dapat dikatakan

bahwa suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dalam grup G disebut sebagai subgrup fuzzy jika dan hanya jika setiap potongan tingkat keanggotaan $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$ membentuk subgrup dari G untuk semua $\alpha \in (0, 1]$.

■

Proposisi 2.7.4 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Jika $\tilde{A}$ merupakan subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G , maka untuk setiap $x \in G$ berlaku $A(e) \vee \lambda \geq A(x) \wedge \mu$.

Bukti.

Diketahui bahwa $\tilde{A}$ merupakan subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G . Berdasarkan Definisi subgrup fuzzy (λ, μ) , diperoleh untuk sembarang $x \in G$. Misalkan

$$y = x^{-1}.$$

Diperoleh persamaan

$$A(y) \vee \lambda \geq A(x) \wedge \mu \quad \text{Persamaan 1.}$$

$$A(x) \vee \lambda \geq A(y) \wedge \mu \quad \text{Persamaan 2.}$$

Dengan merujuk pada kedua persamaan tersebut, dapat diidentifikasi 3 kasus berikut ini :

1. Kasus 1

$$A(y) \geq A(x),$$

$$A(x) \geq A(y),$$

$$A(x) = A(x^{-1}).$$

Dari kasus 1, didapatkan

$$\begin{aligned}
 A(xy) \vee \lambda &\geq A(x) \wedge A(y) \wedge \mu \\
 \Rightarrow A(xx^{-1}) \vee \lambda &\geq A(x) \wedge A(x^{-1}) \wedge \mu \\
 \Rightarrow A(e) \vee \lambda &\geq A(x) \wedge \mu
 \end{aligned}$$

2. Kasus 2

$$A(x) \geq \mu, \forall x \in G.$$

Dari kasus 2, didapatkan

$$A(x) \wedge \mu = \mu.$$

Sehingga, $A(e) \geq \mu$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow A(e) \vee \lambda &\geq \mu \\
 \Rightarrow A(e) \vee \lambda &\geq A(x) \wedge \mu
 \end{aligned}$$

3. Kasus 3

$$A(x) \leq \lambda, \forall x \in G.$$

Dari kasus 3, didapatkan

$$A(e) \vee \lambda = \lambda.$$

Sehingga, $A(x) \leq \lambda$

$$A(x) \wedge \mu \leq \lambda$$

$$A(x) \wedge \mu \leq \lambda \vee A(e)$$

atau

$$A(e) \vee \lambda \geq A(x) \wedge \mu$$

Oleh karena itu, untuk setiap elemen $x \in G$, berlaku $A(e) \vee \lambda \geq A(x) \wedge \mu$. Dengan demikian, pernyataan tersebut terbukti. ■

Akibat 2.7.5 (e.g (Li, Y, Wang, X, & Yang, L. 2013))

Misalkan $\tilde{A}$ merupakan subgrup fuzzy G , terpenuhi 3 kondisi berikut

1. Jika $A(x) \geq \mu$ untuk suatu $x \in G$, maka $A(e) \geq \mu$
2. Jika $A(x) < \mu$ untuk setiap $x \in G$ dan $H = \{x | \lambda < A(x) < \mu\} \neq \emptyset$, maka $A(e) = \max \{A(x) | x \in G\}$.
3. Jika $A(e) \leq \lambda$, maka $A(x) \leq \lambda$ untuk setiap $x \in G$.

Bukti.

1. Asumsikan $A(x) \geq \mu$ untuk suatu $x \in G$. Berdasarkan proposisi 2.7.4 dan definisi subgrup fuzzy (λ, μ) , diperoleh $A(e) \vee \lambda \geq \mu$ dan $A(e) \geq \mu$. Dengan demikian, $A(e) \geq \mu$.
2. Asumsikan $A(x) < \mu$ untuk setiap $x \in G$ dan $H = \{x | \lambda < A(x) < \mu\} \neq \emptyset$. Akan ditunjukkan bahwa $A(x) \leq A(e)$ sehingga memiliki kasus yaitu ketika $x \in H$ dan $x \notin H$.
 - a. Ketika $x \in H$, berlaku $\lambda < A(x) < \mu$. Berdasarkan proposisi 2.7.4, diperoleh $A(e) \geq A(x)$ untuk setiap $x \in G$. Dengan demikian, $A(e) > \lambda$.

- b. Ketika elemen $x \notin H$, berlaku $A(x) < \mu$. Berdasarkan proposisi 2.7.4, diperoleh $A(e) \geq A(x)$.

Mengacu pada dua kondisi yang telah dianalisis sebelumnya, diperoleh bahwa $A(x) \leq A(e)$. Dengan demikian, $A(e)$ merupakan nilai maksimum dari $A(x)$, atau $A(e) = \max\{A(x) \mid x \in G\}$.

3. Asumsikan $A(e) \leq \lambda$. Berdasarkan proposisi 2.7.4, dan syarat $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$, diperoleh $A(e) \leq A(x)$. Dengan demikian, $A(x) \leq \lambda$.

Berdasarkan 3 kasus tersebut, dapat disimpulkan dalam akibat 2.7.5, bahwa $A(e)$ merupakan nilai derajat keanggotaan yang terbesar. ■

Proposisi 2.7.6 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan $\tilde{A}$ merupakan suatu himpunan fuzzy- (λ, μ) pada grup G . Maka, $\tilde{A}$ disebut sebagai subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G jika dan hanya jika setiap $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$ merupakan subgrup dari G untuk setiap $\alpha \in (\lambda, \mu)$.

Bukti.

$\Rightarrow$ Jika $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy- (λ, μ) maka $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$ adalah subgrup untuk setiap $\alpha \in (\lambda, \mu]$.

Ambil sembarang $x, y \in A_\alpha$. Berdasarkan Definisi 2.7.1, diperoleh bahwa $A(x) \geq \alpha$ dan $A(y) \geq \alpha$. Dengan begitu, $A(xy) \vee \lambda \geq A(x) \wedge A(y) \wedge \mu \geq \alpha$. Karena $a \in (\lambda, \mu)$, diperoleh bahwa $A(xy) \geq \alpha$, sedemikian sehingga $x, y \in \tilde{A}_\alpha$, yang berarti terbukti tertutup.

Terdapat elemen $x \in \tilde{A}_\alpha$, maka berlaku $A(x) \geq \alpha$. Berdasarkan definisi subgrup fuzzy- (λ, μ) , diperoleh $A(x^{-1}) \vee \lambda \geq A(x) \wedge \mu \geq \alpha \wedge \mu$. Karena $a \in (\lambda, \mu]$ maka $A(x^{-1}) \geq \alpha$, yang berarti bahwa $x^{-1} \in \tilde{A}_\alpha$. Diketahui bahwa elemen x dan $x^{-1} \in \tilde{A}_\alpha$, sedemikian sehingga $A(xx^{-1}) \vee \lambda \geq A(x) \wedge A(x^{-1}) \wedge \mu \geq \alpha$. Karena $\alpha \in (\lambda, \mu]$, berlaku $A(e) \geq \alpha$, yang berarti bahwa $e \in \tilde{A}_\alpha$. Terbukti $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$ adalah subgrup untuk semua $\alpha \in (\lambda, \mu]$.

$\Leftarrow$ Jika $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$ adalah subgrup untuk setiap $\alpha \in (\lambda, \mu]$ maka $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy- (λ, μ) .

Misalkan $x, y \in G$ dan $\alpha = \min\{A(x), A(y), \mu\}$. Berdasarkan Definisi 2.7.1, diperoleh bahwa $A(x) \geq A_\alpha$ dan $A(y) \geq \alpha$. Karena $\tilde{A}_\alpha$ adalah subgrup, berlaku $xy \in \tilde{A}_\alpha$, sehingga $A(xy) \geq \alpha$. Artinya,

$$A(xy) \geq A(x) \wedge A(y) \wedge \mu.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$A(xy) \vee \lambda \geq A(x) \wedge A(y) \wedge \mu = A(x) \wedge A(y) \wedge \mu,$$

sehingga syarat pertama subgrup fuzzy- (λ, μ) terpenuhi.

Selanjutnya, karena $\tilde{A}_\alpha$ adalah subgrup, terdapat $x^{-1} \in \tilde{A}_\alpha$, sehingga $A(x^{-1}) \geq \alpha$. Dengan demikian

$$A(x^{-1}) \vee \lambda \geq \alpha = A(x) \wedge \mu.$$

Syarat kedua telah terpenuhi. Dengan demikian, terbukti bahwa $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy- (λ, μ) . ■

Proposisi 2.7.7 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , serta $x \in G$. Maka terdapat beberapa kondisi berikut:

1. Jika $A(x) \geq \mu$ maka $A(x^{-1}) \geq \mu$.
2. Jika $\lambda < A(x) < \mu$ maka $A(x^{-1}) = \mu$
3. Jika $A(x) \leq \lambda$ maka $A(x^{-1}) \leq \lambda$

Bukti.

Berdasarkan proposisi 2.7.6, $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G dengan $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$ adalah subgrup dari G untuk setiap $\alpha \in (\lambda, \mu)$.

1. Asumsikan bahwa $A(x) \geq \mu$, diperoleh $x \in A_\mu$. Karena A_μ adalah subgrup dari G , terdapat elemen x^{-1} , sehingga $x^{-1} \in \tilde{A}_\mu$. Dengan demikian, diperoleh bahwa $A(x^{-1}) \geq \mu$.
2. Asumsikan bahwa $\lambda < A(x) < \mu$ sehingga $A(x) \vee \lambda = A(x)$. Dalam grup, setiap elemen memiliki invers dan berdasarkan definisi subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , berlaku $A(x) \geq A(x^{-1})$. Terdapat $x \in \tilde{A}_{A(x)}$ dengan $\tilde{A}_{A(x)}$ merupakan subgrup G , dimiliki $x^{-1} \in \tilde{A}_{A(x)}$ dan disimpulkan bahwa $A(x^{-1}) = A(x)$.
3. Asumsikan bahwa $A(x^{-1}) > \lambda$. Misalkan $\alpha_0 = \min \{A(x^{-1}), \mu\}$. Dari asumsi tersebut, berlaku $\lambda < \alpha_0 \leq \mu$ dan $A(x^{-1}) \geq \alpha_0$ sehingga $x^{-1} \in A_{\alpha_0}$. Berdasarkan proposisi 2.7.6, A_{α_0} merupakan subgrup G , sehingga terdapat $x \in A_{\alpha_0}$. Didapatkan $A(x) \geq \alpha_0 > \lambda$, dimana kontradiksi dengan pernyataan $A(x) \leq \lambda$ sehingga berlaku $A(x^{-1}) \leq \lambda$.

Dari ketiga kondisi di atas, dapat disimpulkan bahwa $A(x) = A(x^{-1})$. ■

Proposisi 2.7.8 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G dan $x, y \in G$. Berlaku beberapa kondisi berikut:

1. Jika $A(x) \geq \mu$ dan $A(y) \geq \mu$, maka $A(xy) \geq \mu$.
2. Jika $\lambda < A(x) < \mu$, $A(x) < A(y)$, maka $A(xy) = A(x) = A(yx)$.
3. Jika $A(x) \leq \lambda$, $A(y) > \lambda$ maka $A(xy) \leq \lambda$ dan $A(yx) \leq \lambda$.

Bukti.

Berdasarkan proposisi 2.7.6, $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G dengan $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$ adalah subgrup dari G untuk setiap $\alpha \in (\lambda, \mu)$.

1. Berdasarkan definisi 2.7.1 dan asumsi bahwa $A(x) \geq \mu$ serta $A(y) \geq \mu$, diperoleh elemen x dan $y \in A_\mu$. Karena, A_μ adalah subgrup, pengoperasian xy menghasilkan elemen A_μ . Oleh karena itu, $A(xy) \geq \mu$.
2. Misalkan $A(x) = \alpha$, $A(y) = \beta$, $A(xy) = \gamma$, maka $\lambda < \alpha < \mu$ dan $\alpha < \beta$. Akan ditunjukkan $\gamma = \alpha$. Berdasarkan pernyataan $\lambda < A(x) < A(y)$ dan $A(x) = \alpha$, maka $A(y) \geq \alpha$, yang memiliki arti bahwa $x, y \in \tilde{A}_\alpha$. Dengan $\tilde{A}_\alpha$ adalah subgrup dari G (berdasarkan proposisi 2.7.6) dan $x, y \in \tilde{A}_\alpha$, maka dapat disimpulkan bahwa $A(xy) \geq \alpha$ atau $\gamma \geq \alpha$.

Asumsi bahwa $\gamma \geq \alpha$ terjadi kontradiksi. Misalkan $\alpha_0 = \min \{\gamma, \beta, \mu\}$ berlaku $\alpha_0 \leq \gamma$, $\alpha_0 \leq \beta$, $\alpha_0 \leq \mu$, dan $\alpha_0 > \lambda$. Dengan $\gamma = A(xy)$ dan $\beta = A(y)$, diperoleh $A(xy) \geq \alpha_0$

dan $A(y) \geq \alpha_0$ sedemikian hingga $x, y \in A_{\alpha_0}$. Berdasarkan proposisi 2.7.6, A_{α_0} adalah subgrup G , sehingga memenuhi syarat tertutup dan memiliki invers. Karena $xy \in A_{\alpha_0}$ dan $y \in A_{\alpha_0}$, diperoleh $xy \cdot y^{-1} \in A_{\alpha_0} = x \in A_{\alpha_0}$. Dari langkah sebelumnya, $x \in A_{\alpha_0}$ maka $A(x) \geq \alpha_0 > \alpha$. Hal tersebut bertentangan dengan asumsi awal dimana $A(x) = \alpha$. Dengan demikian, diperoleh $\gamma = \alpha$, sedemikian sehingga $A(xy) = A(x)$ atau $A(yx) = A(x)$.

3. Diketahui bahwa $A(x) \leq \lambda$, asumsikan $A(xy) > \lambda$ yang bertentangan dengan kondisi yang ada. Berdasarkan definisi $\alpha_0 = \min(A(xy), A(y), \mu)$, maka berlaku $\alpha_0 > \lambda$ dan $\alpha_0 \leq \mu$. Oleh karena itu, $\lambda < \alpha_0 \leq \mu$ dan $xy, y \in A_{\alpha_0}$. Berdasarkan proposisi 2.7.6, A_{α_0} adalah subgrup dari G , maka berlaku $(xy)y^{-1} \in A_{\alpha_0} = x \in A_{\alpha_0}$ dengan arti bahwa $A(x) \geq \alpha_0$. Karena $\alpha_0 > \lambda$ maka $A(x) \geq \alpha_0 > \lambda$ yang dimana bertentangan

dengan kondisi $A(x) \leq \lambda$. Sehingga asumsi $A(xy) > \lambda$ salah, maka $A(xy) \leq \lambda$. Begitupun terhadap pembuktian $A(yx) \leq \lambda$, $x = y^{-1}(yx) \in \tilde{A}_\alpha$ sehingga $A(x) \geq \alpha_0 > \lambda$, kontradiksi dengan $A(x) \leq \lambda$. Asumsi $A(yx) > \lambda$ salah dan diperoleh $A(yx) \leq \lambda$.

■

H. Koset Kiri dan Kanan pada Subgrup fuzzy- (λ, μ)

Definisi 2.8.1 ((Koset kiri dan kanan subgrup fuzzy (λ, μ) , e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan $(G, \circ)$ merupakan grup dan $\tilde{A}$ adalah Subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G , serta $a \in G$. Didefinisikan operasi himpunan fuzzy dengan elemen a yaitu $a \circ \tilde{A}$ dan $\tilde{A} \circ a$ dari G , masing-masing sebagai berikut

- $(a \circ A)(x) = (A(a^{-1} \circ x) \vee \lambda) \wedge \mu, \forall x \in G,$
- $(A \circ a)(x) = (A(x \circ a^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu, \forall x \in G.$

Dimana $a \circ \tilde{A}$ dikatakan sebagai koset kiri dari $\tilde{A}$ dan $\tilde{A} \circ a$ dikatakan sebagai koset kanan dari $\tilde{A}$.

Contoh 2.8.2 Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ merupakan sebuah grup dengan operasi penjumlahan modulo 4 $(\mathbb{Z}_4, +_4)$. Dibentuk sebuah himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada $\mathbb{Z}_4$ sebagai berikut

$$\tilde{A} = \{(0, 1), (1, 0.7), (2, 0.8), (3, 0.7)\},$$

di mana $\tilde{A}$ merupakan sebuah subgrup fuzzy $(0.4, 1)$ atas $\mathbb{Z}_4$.

Diberikan bahwa $a = \bar{1}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (\bar{1} \circ A)(\bar{0}) &= (A(\bar{1}^{-1} +_4 \bar{0}) \vee 0.4) \wedge 1 \\ &= (A(\bar{3}) \vee 0.4) \wedge 1 \\ &= (0.7 \vee 0.4) \wedge 1 \\ &= 0.7, \\ (\bar{1} \circ A)(\bar{1}) &= (A(\bar{1}^{-1} +_4 \bar{1}) \vee 0.4) \wedge 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (A(\bar{0}) \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= (1 \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= 1, \\
(\bar{1} \circ A)(\bar{2}) &= (A(\bar{1}^{-1} +_4 \bar{2}) \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= (A(\bar{1}) \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= (0.7 \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= 0.7, \\
(\bar{1} \circ A)(\bar{3}) &= (A(\bar{1}^{-1} +_4 \bar{3}) \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= (A(\bar{2}) \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= (0.8 \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= 0.8.
\end{aligned}$$

Jadi, $\bar{1} \circ \tilde{A} = \{(\bar{0}, 0.7), (\bar{1}, 1), (\bar{2}, 0.7), (\bar{3}, 0.8)\}$.

Misalkan $a = \bar{1}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
(A \circ \bar{1})(\bar{0}) &= (\bar{0} +_4 A(\bar{1}^{-1}) \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= (A(\bar{3}) \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= (0.7 \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= 0.7, \\
(A \circ \bar{1})(\bar{1}) &= (\bar{1} +_4 A(\bar{1}^{-1}) \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= (A(\bar{0}) \vee 0.4) \wedge 1
\end{aligned}$$

$$= (1 \vee 0.4) \wedge 1$$

$$= 1,$$

$$(A \circ \bar{1})(\bar{2}) = (\bar{2} +_4 A(\bar{1}^{-1}) \vee 0.4) \wedge 1$$

$$= (A(\bar{1}) \vee 0.4) \wedge 1$$

$$= (0.7 \vee 0.4) \wedge 1$$

$$= 0.7,$$

$$(A \circ \bar{1})(\bar{3}) = (\bar{0} +_4 A(\bar{1}^{-1}) \vee 0.4) \wedge 1$$

$$= (A(\bar{2}) \vee 0.4) \wedge 1$$

$$= (0.8 \vee 0.4) \wedge 1$$

$$= 0.8.$$

Jadi, $\tilde{A} \circ \bar{1} = \{(\bar{0}, 0.7), (\bar{1}, 1), (\bar{2}, 0.7), (\bar{3}, 0.8)\}.$

BAB III

Hasil dan Pembahasan

A. Sifat koset kiri dan koset kanan pada subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G .

Berikut diberikan proposisi terkait koset kiri dan koset kanan pada subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G .

Proposisi 3.1.1 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ merupakan subgrup fuzzy- (λ, μ) atas G , serta $a, b \in G$. Diperoleh

$$1. a \circ (b \circ \tilde{A}) = (ab) \circ \tilde{A},$$

$$2. (\tilde{A} \circ a) \circ b = \tilde{A} \circ (ab).$$

Bukti.

1. Akan dibuktikan bahwa $a \circ (b \circ \tilde{A}) = (ab) \circ \tilde{A}$, diketahui

$$(ab) \circ \tilde{A} = \{(x, ((ab) \circ A)(x)) | x \in G\}$$

dengan definisi bahwa $((ab) \circ A)(x) = (A(ab)^{-1}x \vee \lambda) \wedge \mu$. Misalkan $x \in G$ dan berdasarkan Definisi 2.8.1, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} (a \circ (b \circ A))(x) &= ((b \circ A)(a^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (A(b^{-1}a^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu \end{aligned}$$

$$= (A((ab)^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu.$$

Berdasarkan hasil tersebut, dapat dibuktikan bahwa $a \circ (b \circ \tilde{A}) = (ab) \circ \tilde{A}$.

2. Akan dibuktikan bahwa $(\tilde{A} \circ a) \circ b = \tilde{A} \circ (ab)$, diketahui

$$\tilde{A} \circ (ab) = \{(x, (A \circ (ab))(x)) | x \in G\}$$

dengan definisi bahwa $(A \circ (ab))(x) = \{(A(x(ab)^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu$.
Misalkan $x \in G$ dan berdasarkan Definisi 2.8.1, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} ((A \circ a) \circ b)(x) &= ((A \circ a)(xb^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (A(xb^{-1})(a^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (A(x(ab)^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu. \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil tersebut, dapat dibuktikan bahwa $(\tilde{A} \circ a) \circ b = \tilde{A} \circ (ab)$

■

Proposisi 3.1.2 (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013)

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ merupakan subgrup fuzzy- (λ, μ) G dan $a, b \in G$.
Pernyataan berikut ekuivalen :

a. $b \circ \tilde{B} = a \circ \tilde{A}$

b. $(a^{-1}b) \circ \tilde{B} = e \circ \tilde{A}$

c. $(b^{-1}) \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{B}$

Bukti.

1. Untuk pernyataan a ke pernyataan b, akan dibuktikan bahwa jika $b \circ \tilde{B} = a \circ \tilde{A}$, maka $(a^{-1}b) \circ B = e \circ \tilde{A}$. Diketahui

$$b \circ \tilde{A} = \{(x, (b \circ B)(x)) | x \in G\},$$

$$a \circ \tilde{A} = \{(x, (a \circ A)(x)) | x \in G\}, \text{ berlaku}$$

$$b \circ \tilde{A} = a \circ \tilde{A},$$

dengan definisi bahwa $(b \circ B)(x) = (B(b^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu$ dan $(a \circ A)(x) = (A(a^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu$.

Berdasarkan Definisi koset 2.8.1, didefinisikan

$$(a^{-1}b) \circ \tilde{B} = \{(x, ((a^{-1}b) \circ B)(x)) | x \in G\},$$

$$e \circ \tilde{A} = \{(x, (e \circ A)(x)) | x \in G\},$$

dengan $((a^{-1}b) \circ B)(x) = (B(b^{-1}ax) \vee \lambda) \wedge \mu$ dan $(e \circ A)(x) = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu$.

Ambil sembarang $x \in G$,
diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} & (B(b^{-1}(ax) \vee \lambda) \wedge \mu) \\ &= (A(a^{-1}(ax) \vee \lambda) \wedge \mu) \\ &= (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu. \end{aligned}$$

Dengan asumsi bahwa $b \circ \tilde{B} = a \circ \tilde{A}$, dapat disimpulkan bahwa $(a^{-1}b) \circ B = e \circ \tilde{A}$.

2. Untuk pernyataan b ke pernyataan c, akan dibuktikan bahwa jika $(a^{-1}b) \circ B = e \circ \tilde{A}$, maka $(b^{-1}a) \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{B}$. Diketahui

$$(a^{-1}b) \circ \tilde{B} = \{(x, ((a^{-1}b) \circ B)(x)) | x \in G\},$$

$$e \circ \tilde{A} = \{(x, (e \circ A)(x)) | x \in G\}, \text{ berlaku}$$

$$(a^{-1}b) \circ \tilde{B} = e \circ \tilde{A},$$

dengan definisi bahwa $((a^{-1}b) \circ B)(x) = (B(b^{-1}ax) \vee \lambda) \wedge \mu$ dan

$$(e \circ A)(x) = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu.$$

Berdasarkan Definisi Koset 2.8.1, didefinisikan

$$(b^{-1}a) \circ \tilde{A} = \{(x, ((b^{-1}a) \circ A)(x)) | x \in G\},$$

$$e \circ \tilde{B} = \{(x, ((e \circ B)(x)) | x \in G\},$$

dengan $((b^{-1}a) \circ A)(x) = (A(a^{-1}bx) \vee \lambda) \wedge \mu$ dan

$$(e \circ B)(x) = (B(x) \vee \lambda) \wedge \mu.$$

Ambil sembarang $x \in G$,

diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} & (A(a^{-1}bx) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (B(b^{-1}a)(a^{-1}bx) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (B(x) \vee \lambda) \wedge \mu. \end{aligned}$$

Dengan asumsi bahwa $(a^{-1}b) \circ B = e \circ \tilde{A}$, dapat disimpulkan bahwa $(b^{-1}a) \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{B}$.

3. Untuk pernyataan c ke pernyataan a, akan dibuktikan bahwa jika $(b^{-1}a) \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{B}$ maka $b \circ \tilde{B} = a \circ \tilde{A}$. Diketahui

$$(b^{-1}a) \circ \tilde{A} = \{(x, ((b^{-1}a) \circ A)(x)) | x \in G\},$$

$$e \circ \tilde{B} = \{(x, (e \circ B)(x)) | x \in G\}, \text{ berlaku}$$

$$e \circ \tilde{B} = (b^{-1}a) \circ \tilde{A},$$

dengan definisi bahwa $((b^{-1}a) \circ A)(x) = (A(a^{-1}bx) \vee \lambda) \wedge \mu$ dan

$$(e \circ B)(x) = (B(x) \vee \lambda) \wedge \mu.$$

Berdasarkan Definisi Koset 2.8.1, didefinisikan

$$b \circ \tilde{B} = \{(x, (b \circ B)(x)) | x \in G\},$$

$$a \circ \tilde{A} = \{(x, (a \circ A)(x)) | x \in G\},$$

dengan $(b \circ B)(x) = (B(b^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu$ dan

$$(a \circ A)(x) = (A(a^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu.$$

Ambil sembarang $x \in G$, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} & (B(b^{-1}a)x \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (A(b^{-1}a)(a^{-1}bx) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu. \end{aligned}$$

Dengan asumsi bahwa $(b^{-1}a) \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{B}$, dapat disimpulkan bahwa $b \circ \tilde{B} = a \circ \tilde{A}$.



Proposisi 3.1.3 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ merupakan subgrup fuzzy- (λ, μ) G dan $a, b \in G$.

Pernyataan berikut ekuivalen :

a. $\tilde{A} \circ a = \tilde{B} \circ b$

b. $\tilde{B} \circ (ba^{-1}) = \tilde{A} \circ e$

c. $\tilde{A} \circ (ab^{-1}) = \tilde{B} \circ e$

Bukti.

1. Untuk pernyataan a ke pernyataan b, akan dibuktikan bahwa jika $\tilde{B} \circ b = \tilde{A} \circ a$ maka $\tilde{B} \circ (ba^{-1}) = \tilde{A} \circ e$. Diketahui

$$\tilde{A} \circ a = \{(x, (A \circ a)(x)) | x \in G\},$$

$$\tilde{B} \circ b = \{(x, (B \circ b)(x)) | x \in G\}, \text{ berlaku}$$

$$\tilde{B} \circ b = \tilde{A} \circ a,$$

dengan definisi bahwa $(A \circ a)(x) = (A(xa^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu$ dan $(B \circ b)(x) = (B(xb^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu$.

Berdasarkan Definisi Koset 2.8.1, didefinisikan

$$\tilde{A} \circ e = \{(x, (A \circ e)(x)) | x \in G\},$$

$$\tilde{B} \circ (ba^{-1}) = \{(x, (B \circ (ba^{-1}))(x)) | x \in G\},$$

dengan $(A \circ e)(x) = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu$ dan $(B \circ (ba^{-1}))(x) = (B(xa)b^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu$.

Ambil sembarang $x \in G$,

diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}
 & (B(xa)b^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu \\
 &= (A(xa^{-1})a^{-1} \vee \lambda) \wedge \mu) \\
 &= (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu).
 \end{aligned}$$

Dengan asumsi bahwa $\tilde{B} \circ b = \tilde{A} \circ a$, dapat disimpulkan bahwa $\tilde{B} \circ (ba^{-1}) = \tilde{A} \circ e$.

2. Untuk pernyataan b ke pernyataan c, akan dibuktikan bahwa jika $\tilde{B} \circ (ba^{-1}) = \tilde{A} \circ e$ maka $\tilde{A} \circ (ab^{-1}) = \tilde{B} \circ e$. Diketahui

$$\begin{aligned}
 \tilde{B} \circ (ba^{-1}) &= \{(x, (B \circ (ba^{-1}))(x)) | x \in G\}, \\
 \tilde{A} \circ e &= \{(x, (A \circ e)(x)) | x \in G\}, \text{ berlaku} \\
 \tilde{A} \circ e &= \tilde{B} \circ (ba^{-1}),
 \end{aligned}$$

dengan definisi bahwa $(B \circ (ba^{-1}))(x) = (B(xa)b^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu$ dan $(A \circ e)(x) = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu$.

Berdasarkan Definisi Koset 2.8.1, didefinisikan

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} \circ (ab^{-1}) &= \{(x, (A \circ (ab^{-1}))(x)) | x \in G\}, \\
 \tilde{B} \circ e &= \{(x, (B \circ e)(x)) | x \in G\},
 \end{aligned}$$

dengan $(A \circ (ab^{-1}))(x) = (A(xb)a^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu$ dan $(B \circ e)(x) = (B(x) \vee \lambda) \wedge \mu$.

Ambil sembarang $x \in G$,

diperoleh bahwa

$$(A(xb)a^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu$$

$$\begin{aligned}
&= (B(xab^{-1})(b)a^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu) \\
&= (B(x) \vee \lambda) \wedge \mu.
\end{aligned}$$

Dengan asumsi bahwa $\tilde{B} \circ (ba^{-1}) = \tilde{A} \circ e$, dapat disimpulkan $\tilde{A} \circ (ab^{-1}) = \tilde{B} \circ e$ terbukti.

3. Untuk pernyataan c ke pernyataan a, akan dibuktikan bahwa jika $\tilde{A} \circ (ab^{-1}) = \tilde{B} \circ e$ maka $\tilde{B} \circ b = \tilde{A} \circ a$. Diketahui

$$\tilde{A} \circ (ab^{-1}) = \{(x, (A \circ (ab^{-1}))(x)) | x \in G\},$$

$$\tilde{B} \circ e = \{(x, (B \circ e)(x)) | x \in G\}, \text{ berlaku}$$

$$\tilde{A} \circ (ab^{-1}) = \tilde{B} \circ e,$$

dengan definisi bahwa $(A \circ (ab^{-1}))(x) = (A(xb)a^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu$ dan

$$(B \circ e)(x) = (B(x) \vee \lambda) \wedge \mu.$$

Berdasarkan Definisi Koset 2.8.1, didefinisikan

$$\tilde{B} \circ b = \{(x, (B \circ b)(x)) | x \in G\},$$

$$\tilde{A} \circ a = \{(x, (A \circ a)(x)) | x \in G\},$$

dengan $(B \circ b)(x) = (B(xb^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu$ dan

$$(A \circ a)(x) = (A(xa^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu.$$

Ambil sembarang $x \in G$,

diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}
&(B(xa)b^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu \\
&= (A(xb)a^{-1})(b^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu)
\end{aligned}$$

$$= (A(xa^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu.$$

Dengan asumsi bahwa $\tilde{A} \circ (ab^{-1}) = \tilde{B} \circ e$, maka dapat disimpulkan bahwa $\tilde{B} \circ b = \tilde{A} \circ a$.

■

Akibat 3.1.4 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan $\tilde{A}$ merupakan subgrup fuzzy- (λ, μ) G , serta $a, b \in G$. Diperoleh

1. $a \circ \tilde{A} = b \circ \tilde{A} \Leftrightarrow e \circ A = (a^{-1}b) \circ \tilde{A} \Leftrightarrow (b^{-1}) \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$
2. $\tilde{A} \circ a = \tilde{A} \circ b \Leftrightarrow \tilde{A} \circ e = \tilde{A} \circ (ba^{-1}) \Leftrightarrow \tilde{A} \circ (ab^{-1}) = \tilde{A} \circ e$

Bukti. Dengan menggunakan Proposisi 3.1.2 dan Proposisi 3.1.3 dimana $\tilde{A} = \tilde{B}$, diperoleh bahwa pernyataan 1 dan 2 terpenuhi. ■

Proposisi 3.1.5 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy- (λ, μ) dan $x \in G$, terdapat beberapa kondisi berikut

1. Jika $\lambda < A(x) < \mu$ maka $(e \circ A)(x) = A(x)$,
2. Jika $A(x) \geq \mu$ maka $(e \circ A)(x) = \mu$, dan
3. Jika $A(x) \leq \lambda$ maka $(e \circ A)(x) = \lambda$.

Bukti.

1. Diketahui bahwa elemen $e^{-1} = e$, sehingga diperoleh $(A(e^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu$. Asumsikan bahwa

$\lambda < A(x) < \mu$, sedemikian sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}(e \circ A)(x) &= (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= A(x).\end{aligned}$$

Berdasarkan penjelasan di atas , terbukti bahwa jika $\lambda < A(x) < \mu$, maka $(e \circ A)(x) = A(x)$.

2. Asumsikan bahwa $A(x) \geq \mu$. Didefinisikan bahwa $(e \circ A)(x) = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu$ dengan syarat $\lambda < \mu$. Diperoleh bahwa $(e \circ A)(x) = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu = \mu$. Berdasarkan penjelasan di atas , terbukti bahwa jika $A(x) \geq \mu$, maka $(e \circ A)(x) = \mu$.
3. Jika $A(x) \leq \lambda$ maka $(e \circ A)(x) = \lambda$

Asumsikan bahwa $A(x) < \lambda$. Didefinisikan bahwa $(e \circ A)(x) = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu$ dengan syarat $\lambda < \mu$. Diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}(e \circ A)(x) &= (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= \lambda.\end{aligned}$$

Berdasarkan penjelasan di atas, terbukti bahwa jika $A(x) \leq \lambda$, maka $(e \circ A)(x) = \lambda$.



Proposisi 3.1.6 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G . Hasil operasi $e \circ \tilde{A}$ adalah Subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G dan subgrup fuzzy.

Bukti.

Subgrup fuzzy- (λ, μ) memiliki subset $\tilde{A}_\alpha$, sehingga akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $\tilde{A}_\alpha = \left(e \circ \tilde{A} \right)_\alpha$ untuk semua $\alpha \in (\lambda, \mu)$ dengan menunjukkan dua asumsi berikut,

1. $\tilde{A}_\alpha \subseteq \left(e \circ \tilde{A} \right)_\alpha$

Misalkan dengan $\tilde{A}_\alpha = \{x \in G | A(x) \geq \alpha\}$. Berdasarkan definisi $(e \circ A)(x) = \{(A(x) \vee \lambda) \wedge \mu, \forall x \in G\}$ dengan $\alpha > \lambda$, diperoleh $(e \circ A)(x) = A(x) \wedge \mu$.

Karena $A(x) \geq \alpha$, berlaku bahwa $(e \circ A)(x) \geq \lambda$, yang memiliki arti bahwa $x \in \left(e \circ \tilde{A} \right)_\alpha$, sehingga $\tilde{A}_\alpha \subseteq \left(e \circ \tilde{A} \right)_\alpha$.

2. $\left(e \circ \tilde{A} \right)_\alpha \subseteq \tilde{A}_\alpha$

Misalkan $x \in \left(e \circ \tilde{A} \right)_\alpha$, berlaku bahwa $(e \circ A)(x) \geq \alpha$. Berdasarkan definisi $(e \circ A)(x) = \{(A(x) \vee \lambda) \wedge \mu, \forall x \in G\}$, dimana terdapat dalam interval (λ, μ) , berlaku bahwa $\alpha > \lambda$ dan $\alpha \leq \mu$. Sehingga, $A(x) \geq \alpha$ yang berarti bahwa $x \in \tilde{A}_\alpha$. Oleh karena itu, $x \in \left(e \circ \tilde{A} \right)_\alpha$ dan berlaku bahwa $(e \circ A)(x) \geq \alpha$.

Berdasarkan dua asumsi di atas, terbukti bahwa $\tilde{A}_\alpha = \left(e \circ \tilde{A} \right)_\alpha$. Diketahui $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy- (λ, μ) , berdasarkan Proposisi 2.7.6, dimiliki $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$ dan $\tilde{A}_\alpha$ merupakan subgrup G . Karena $\tilde{A}_\alpha = \left(e \circ \tilde{A} \right)_\alpha$, berlaku bahwa $\left(e \circ \tilde{A} \right)_\alpha \neq \emptyset$ dan $\left(e \circ \tilde{A} \right)_\alpha$ juga merupakan subgrup. Oleh karena itu, $\left(e \circ \tilde{A} \right)$ juga merupakan subgrup fuzzy- (λ, μ) . Dengan $\tilde{A}$ merupakan subgrup fuzzy- (λ, μ) , mengakibatkan $(e \circ A)(x)$ memiliki batasan $\lambda \leq (e \circ A)(x) \leq \mu$.

Akan ditunjukkan bahwa $(e \circ \tilde{A})$ adalah subgrup fuzzy dengan $\alpha \in (0, 1]$.

a. Untuk $\alpha \in (0, \lambda]$

Diketahui bahwa $(e \circ A)(x) \geq \lambda$ untuk semua $x \in G$. Setiap elemen G akan menjadi subset $(e \circ \tilde{A})_\alpha$, dimana $(e \circ \tilde{A})_\alpha = \{x \in G | (e \circ A)(x) \geq \alpha\}$, sehingga $(e \circ \tilde{A}) = G$. G merupakan subgrup dari dirinya sendiri, sehingga berlaku bahwa $(e \circ \tilde{A})_\alpha$ adalah subgrup.

b. Untuk $\alpha \in (\lambda, \mu]$

Diketahui bahwa $\tilde{A}_\alpha = (e \circ \tilde{A})_\alpha$ dan $\tilde{A}_\alpha$ dikatakan subgrup G , dimana $\tilde{A}_\alpha \neq 0$ (berdasarkan Proposisi 2.7.3). Karena $\tilde{A}_\alpha = (e \circ \tilde{A})_\alpha$ sehingga berlaku $(e \circ \tilde{A})_\alpha \neq \emptyset$ dan $(e \circ \tilde{A})_\alpha$ merupakan subgrup dari G .

c. Untuk $\alpha \in (\mu, 1]$

Diketahui $(e \circ A)(x) \leq \mu$ untuk semua $x \in G$. Dengan diketahui bahwa $\alpha > \mu$, sehingga tidak ada elemen x yang memenuhi $(e \circ A)(x) \geq \alpha$ dan mengakibatkan $(e \circ \tilde{A})_\alpha = \emptyset$, atau biasa disebut dengan subgrup trivial.

Berdasarkan 3 batasan α tersebut, $(e \circ \tilde{A})_\alpha \neq \emptyset$ dan $(e \circ \tilde{A})$ merupakan subgrup fuzzy G (proposisi 2.7.3). ■

Proposisi 3.1.7 (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013)

Misalkan $\tilde{A}$ merupakan subgrup normal fuzzy (λ, μ) dari G . Hasil operasi $e \circ \tilde{A}$ adalah subgrup normal fuzzy (λ, μ) dari G dan subgrup normal fuzzy dari G .

Bukti.

Berdasarkan proposisi 3.1.6, diketahui bahwa jika $\tilde{A}$ adalah

subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , maka $e \circ \tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G . Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup normal fuzzy- (λ, μ) dari G yang terdefinisi

$$A(xyx^{-1}) \vee \lambda \geq A(y) \wedge \mu,$$

untuk setiap $x \in G$. Akan dibuktikan bahwa $e \circ \tilde{A}$ memenuhi

$$(e \circ A)(xyx^{-1}) \vee \lambda \geq (e \circ A)(y) \wedge \mu.$$

Mengacu pada definisi subgrup normal fuzzy- (λ, μ) dari G , dapat dinyatakan bahwa

$$\begin{aligned} (e \circ A)(xyx^{-1}) \vee \lambda &= (A(xyx^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu \vee \lambda \\ &\geq (A(y) \vee \lambda) \wedge \mu \wedge \mu \\ &= (A(xyx^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &\geq (A(y) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (A(y) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (e \circ A)(y) \\ &= (e \circ A)(y) \wedge \mu. \end{aligned}$$

Berdasarkan pembuktian di atas, terbukti bahwa jika $\tilde{A}$ merupakan subgrup normal fuzzy (λ, μ) dari G , maka $e \circ \tilde{A}$ juga merupakan subgrup normal fuzzy (λ, μ) dari G dan merupakan subgrup normal fuzzy dari G . ■

Proposisi 3.1.8 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Jika $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , serta $A(e) \geq \mu$, maka $a \in \tilde{A}_\mu$, jika dan hanya jika $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$.

Bukti.

Asumsikan bahwa $a \in \tilde{A}_\mu$, sedemikian sehingga $A(a) \geq \mu$. Berdasarkan Proposisi 2.7.6, $\tilde{A}_\mu$ adalah subgrup dari G , sehingga terdapat $a^{-1} \in \tilde{A}_\mu$. Berdasarkan Proposisi 2.7.7 dan diketahui bahwa $A(a) \geq \mu$, diperoleh bahwa $A(a^{-1}) \geq \tilde{A}_\mu$. Misalkan $x \in G$ dan terdapat asumsi 3 kasus berikut.

a. Kasus 1

Jika $A(x) \geq \mu$ maka $x \in \tilde{A}_\mu$, yang mengimplikasikan bahwa $a^{-1}x \in A_\mu$. Berdasarkan Proposisi 2.7.8, diperoleh bahwa $A(a^{-1}x) \geq \tilde{A}_\mu$. Dengan demikian, diperoleh

$$(a \circ A)(x) = (A(a^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu = (A(a^{-1}x) \wedge \mu) = \mu,$$

$$(e \circ A)(x) = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu = (A(x) \wedge \mu) = \mu.$$

Terbukti bahwa, $(a \circ \tilde{A}) = (e \circ \tilde{A})$.

b. Kasus 2

Jika $\lambda < A(x) < \mu$ dan berdasarkan Proposisi 2.7.8), diperoleh bahwa $A(a^{-1}x) = A(x)$. Dengan demikian, diperoleh

$$(a \circ A)(x) = (A(a^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu = \mu,$$

$$(e \circ A)(x) = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu = \mu.$$

Terbukti bahwa, $(a \circ \tilde{A}) = (e \circ \tilde{A})$.

c. Kasus 3

Jika $A(x) \leq \lambda$ dan berdasarkan Proposisi 2.7.8, maka $A(a^{-1}x) \leq \lambda$. Dengan demikian, diperoleh

$$(a \circ A)(x) = (A(a^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu = \lambda \wedge \mu = \lambda,$$

$$(e \circ A)(x) = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu = \lambda \wedge \mu = \lambda.$$

Terbukti bahwa, $(a \circ \tilde{A}) = (e \circ \tilde{A})$.

Mengacu pada ketiga kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa $(a \circ \tilde{A}) = (e \circ \tilde{A})$. Selanjutnya, diperoleh

$$\begin{aligned} (a \circ A)(a) &= (e \circ A)(a) \\ \Leftrightarrow (A(a^{-1}a) \vee \lambda) \wedge \mu &= (A(a) \vee \lambda) \wedge \mu \\ \Leftrightarrow (A(e) \vee \lambda) \wedge \mu &= (A(a) \vee \lambda) \wedge \mu. \end{aligned}$$

Berdasarkan asumsi bahwa $A(e) \geq \mu$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \mu &= (A(a) \vee \lambda) \wedge \mu \\ \Leftrightarrow \mu &= A(a) \wedge \mu \end{aligned}$$

Untuk memenuhi syarat $\mu = \mu$, diperoleh bahwa $A(a) \geq \mu$. Hal ini menunjukkan bahwa $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $a \in \tilde{A}_\mu$. ■

Demikian pula, Jika $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , serta $A(e) \geq \mu$, maka $a \in \tilde{A}_\mu$, jika dan hanya jika $\tilde{A} \circ a = \tilde{A} \circ e$.

Akibat 3.1.9 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Jika $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , serta $a \in \tilde{A}_\mu$, maka

$$a \circ \tilde{A} = \tilde{A} \circ a = e \circ \tilde{A}.$$

Bukti.

Diketahui bahwa $a \in \tilde{A}_\mu$ dan berdasarkan akibat 2.7.5, diperoleh bahwa $A(a) \geq \mu$. Berdasarkan proposisi 3.1.8 serta asumsi $A(a) \geq \mu$, berlaku bahwa

$$a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A},$$

$$\tilde{A} \circ a = \tilde{A} \circ e.$$

Berdasarkan definisi koset, dinyatakan bahwa

$$(e \circ A)(x) = (A(e^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu,$$

$$(A \circ e)(x) = (A(xe^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu.$$

Diketahui bahwa $e^{-1}x = x$ dengan setiap $x \in G$, diperoleh bahwa $(e \circ A)(x) = (A \circ e)(x)$. Dengan demikian, diperoleh

$$e \circ \tilde{A} = \tilde{A} \circ e$$

$$\Leftrightarrow a \circ \tilde{A} = \tilde{A} \circ a = e \circ \tilde{A}.$$

■

Akibat 3.1.10 (e.g (Li, Y, Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G dan $a, b \in G$, berlaku $a\tilde{A}_\mu = b\tilde{A}_\mu$, jika dan hanya jika $a \circ \tilde{A} = b \circ \tilde{A}$ dengan $\tilde{A}_\mu \neq \emptyset$.

Bukti.

Berdasarkan definisi $\tilde{A}_\mu = \{x \in G | A(x) \geq \mu\}$. Diasumsikan $a\tilde{A}_\mu = b\tilde{A}_\mu$. Dengan $a, b \in \tilde{A}_\mu$, berlaku bahwa $b^{-1}a \in \tilde{A}_\mu$. Karena $b^{-1}a \in \tilde{A}_\mu$, diperoleh $(b^{-1}a) \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$ (Berdasarkan Proposisi 3.1.8). Jika diketahui bahwa $(b^{-1}a) \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$ dan berdasarkan Akibat 3.1.4, diperoleh bahwa $a \circ A = b \circ A$. Oleh karena itu, $a\tilde{A}_\mu = b\tilde{A}_\mu$ terbukti, jika dan hanya jika $a \circ \tilde{A} = b \circ \tilde{A}$ dengan $\tilde{A}_\mu \neq \emptyset$. ■

Demikian pula, Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G dan $a, b \in G$, berlaku $\tilde{A}_\mu a = \tilde{A}_\mu b$, jika dan hanya jika $\tilde{A} \circ a = \tilde{A} \circ b$.

Proposisi 3.1.11 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Jika $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G dan $\lambda < A(e) < \mu$, maka $A(a) = A(e)$, jika dan hanya jika $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$.

Bukti.

Pertama, asumsikan bahwa $A(a) = A(e)$ dan didapatkan $a \in \tilde{A}_{A(e)}$. Berdasarkan Proposisi 2.7.6, $\tilde{A}_{A(e)}$ adalah subgrup G dan terdapat $a^{-1} \in G$. Didapatkan bahwa $A(a^{-1}) \geq A(e)$. Berdasarkan Akibat 2.7.5, $A(e)$ adalah nilai derajat keanggotaan paling tinggi, sehingga berlaku $A(a^{-1}) = A(e)$. Misalkan $x \in G$ dan berdasarkan Akibat 2.7.5, diperoleh $A(x) \leq A(e)$.

Berikut ini adalah 3 kondisi $A(x)$

a. Kondisi 1

Kondisi dimana $A(x) \leq \lambda$. Berdasarkan Proposisi 2.7.8, jika $A(x) \leq \lambda$ maka $A(a^{-1}x) \leq \lambda$. Dengan begitu, dinyatakan bahwa

$$(a \circ A)(x) = (A(a^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu = \lambda \wedge \mu = \lambda,$$

$$(e \circ A)(x) = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu = \lambda \wedge \mu = \lambda.$$

Berdasarkan pernyataan di atas, disimpulkan bahwa $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$

b. Kondisi 2

Kondisi dimana $\lambda < A(x), A(e)$. Diketahui bahwa $\lambda < A(e) < \mu$ dan $A(x) < A(e)$. Dengan asumsi $A(e) = A(a^{-1})$ dan berdasarkan Proposisi 2.7.8, dapat disimpulkan bahwa $A(a^{-1}x) = A(x)$. Dengan begitu, dinyatakan bahwa

$$(a \circ A)(x) = (A(a^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu = A(x),$$

$$(e \circ A)(x) = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu = A(x).$$

Berdasarkan pernyataan di atas, disimpulkan bahwa $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$

c. Kondisi 3

Kondisi dimana $(A(x) = A(e))$. Dengan kondisi tersebut, berlaku bahwa $x \in \tilde{A}_{A(e)}$. Diketahui bahwa $A(e) = A(a^{-1})$ dan $a^{-1} \in \tilde{A}_{A(e)}$. Berdasarkan Proposisi 2.7.6, $\tilde{A}_{A(e)}$ merupakan subgrup G sehingga $x, a^{-1} \in \tilde{A}_{A(e)}$. Dengan $a^{-1}x \in \tilde{A}_{A(e)}$, terdapat $A(a^{-1}x) \geq A(e)$. Berdasarkan Akibat 2.7.5, berlaku bahwa $A(a^{-1}x) = A(e)$. Dengan alasan tersebut, diperoleh bahwa, $A(a^{-1}x) = A(x) = A(e)$.

Dengan penjabaran sebagai berikut

$$(a \circ A)(x) = (A(a^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu = (e \circ A)(x).$$

Berdasarkan pernyataan di atas, disimpulkan bahwa $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$

Dengan menganggap bahwa $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$, sehingga hal tersebut mengimplikasikan bahwa berlaku, $(a \circ A)(a) = (e \circ A)(a)$. Dengan demikian, diperoleh bahwa $(A(a^{-1}a) \vee \lambda) \wedge \mu = (A(a) \vee \lambda) \wedge \mu$, sehingga $A(e) = A(a) \vee \lambda$. Karena memenuhi $\lambda < A(e) < \mu$, dapat disimpulkan bahwa $A(e) = A(a)$. Dengan demikian, jika $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$ maka $A(a) = A(e)$. ■

Demikian pula, Jika $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G dan $\lambda < A(e) < \mu$, maka $A(a) = A(e)$ jika dan hanya jika $\tilde{A} \circ a = \tilde{A} \circ e$.

Akibat 3.1.12 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G dan $a, b \in G$, berlaku bahwa $aA_{A(e)} = bA_{A(e)}$, jika dan hanya jika $a \circ \tilde{A} = b \circ \tilde{A}$ dengan $\lambda < A(e) < \mu$.

Bukti.

Berdasarkan definisi $\tilde{A}_{A(e)} = \{x \in G | A(x) \geq A(e)\}$. Diasumsikan $a\tilde{A}_{A(e)} = \tilde{A}_{A(e)}$. Dengan $a, b \in \tilde{A}_{A(e)}$, berlaku $b^{-1}a \in \tilde{A}_{A(e)}$. Karena $b^{-1}a \in \tilde{A}_{A(e)}$, diperoleh bahwa $(b^{-1}a) \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$ (Berdasarkan Proposisi 3.1.11). Jika $(b^{-1}a) \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$ dan berdasarkan Akibat 3.1.4, maka diperoleh bahwa $a \circ \tilde{A} = b \circ \tilde{A}$. Oleh karena itu, $a\tilde{A}_{A(e)} = b\tilde{A}_{A(e)}$ jika dan hanya jika $a \circ \tilde{A} = b \circ \tilde{A}$, dengan $\lambda < A(e) < \mu$. ■

Demikian pula, Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G dan $a, b \in G$, berlaku bahwa $\tilde{A}_{A(e)}a = \tilde{A}_{A(e)}b$, jika dan hanya jika $\tilde{A} \circ a = \tilde{A} \circ b$, dengan $\lambda < A(e) < \mu$.

Proposisi 3.1.13 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G . Hasil operasi $a \circ \tilde{A}$ adalah Subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , jika dan hanya jika $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$.

Bukti.

Diasumsikan bahwa $a \circ \tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , sehingga akan diberikan kondisi nilai $A(e)$ dalam rentang (λ, μ) sebagai berikut

1. Jika $A(e) \geq \mu$, maka $(a \circ A)(a) = (A(a^{-1}a) \vee \lambda) \wedge \mu = (A(e) \vee \lambda) \wedge \mu = \mu$. Karena $(a \circ A)(a) = \mu$, berlaku $a \in (a \circ A)_\mu$ dengan makna bahwa $(a \circ A)_\mu = A(a) \geq \mu$ dan $(a \circ \tilde{A})_\mu \neq \emptyset$. $(a \circ \tilde{A})_\mu$ merupakan subgrup G dan berdasarkan Proposisi 2.7.6, terdapat $e \in (a \circ \tilde{A})_\mu$. Sejak $(a \circ A)(e) = (A(a^{-1} \vee$

$\lambda) \wedge \mu = \mu$, diimplikasikan menjadi $A(a^{-1}) \geq \mu$ sehingga $a^{-1} \in \mu$. Karena $A(a^{-1}) \geq \mu$, diperoleh $A(a) \geq \mu$ sehingga dimiliki $a \in \mu$ (berdasarkan Proposisi 2.7.8). Berdasarkan Proposisi 3.1.8, jika $a \in \mu$ maka $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$.

2. Jika $\lambda < A(e) < \mu$, maka $A(e) \geq A(a^{-1})$ (berdasarkan Akibat 2.7.5) dan $(a \circ A)(a) = (A(e) \vee \lambda) \wedge \mu = A(e)$. Karena $(a \circ A)(a) = A(e)$, berlaku $a \in (a \circ \tilde{A})_{A(e)}$. Karena $a \circ \tilde{A}$ merupakan subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , sehingga diperoleh $(a \circ \tilde{A})_{A(e)}$ merupakan subgrup fuzzy (λ, μ) dari G (berdasarkan Proposisi 2.7.6). Dalam subgrup, terdapat elemen identitas e sehingga $e \in (a \circ \tilde{A})_{A(e)}$. Dijabarkan sebagai berikut

$$(a \circ A)_{A(e)} = \{(a \circ A)(e) \geq A(e)\},$$

$$A(e) \leq (a \circ A)(e) = A(e) \leq (A(a^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu.$$

Dengan $A(e) < \mu$, menghasilkan $(A(a^{-1}) \vee \lambda)$.

$A(a^{-1}) \geq A(e)$, sehingga $a^{-1} \in \tilde{A}_{A(e)}$ dan diimplikasikan $a \in \tilde{A}_{A(e)}$, karena $\tilde{A}_{A(e)}$ merupakan subgrup G . Dengan begitu, $A(a) \geq A(e)$ dan berdasarkan Akibat 2.7.5, berlaku $A(a) = A(e)$. Berdasarkan Proposisi 3.1.11, jika $A(a) = A(e)$ maka $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$.

3. Jika $A(e) \leq \lambda$, maka $A(x) \leq \lambda$ untuk setiap $x \in G$ berdasarkan Akibat 2.7.5. Didefinisikan

$$(a \circ A)(x) = (A(a^{-1}x) \vee \lambda) \wedge \mu = \lambda,$$

$$(e \circ A)(x) = (A(x) \vee \lambda) \wedge \mu = \lambda,$$

dan berlaku bahwa, $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$.

Oleh karena itu, berdasarkan Proposisi 3.1.6, $a \circ \tilde{A}$ adalah Subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G .

■

Proposisi 3.1.14 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , $a, b \in G$, $\alpha \in (\lambda, \mu]$ dan $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$. Jika $a \circ \tilde{A} = b \circ \tilde{A}$ maka $a\tilde{A}_\alpha = b\tilde{A}_\alpha$.

Bukti.

Diketahui $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$, sehingga $\tilde{A}_\alpha$ merupakan subgrup G (berdasarkan Proposisi 2.7.6), dimana juga terdapat elemen identitas e dalam subgrup sehingga $A(e) \geq \alpha > \lambda$. Asumsikan bahwa $a \circ \tilde{A} = b \circ \tilde{A}$ dan $(a \circ A)(b) = (b \circ A)(b)$, sehingga diperoleh

$$(a \circ A)(b) = (b \circ A)(b)$$

$$\Leftrightarrow (A(a^{-1}b) \vee \lambda) \wedge \mu = (A(b^{-1}b) \vee \lambda) \wedge \mu$$

$$\Leftrightarrow (A(a^{-1}b) \vee \lambda) \wedge \mu = (A(e) \vee \lambda) \wedge \mu$$

$$\Leftrightarrow (A(a^{-1}b) \vee \lambda) \wedge \mu = A(e) \wedge \mu.$$

Dengan beberapa kondisi berikut

1. Jika $A(e) \geq \mu$ maka $A(a^{-1}b) \geq \mu$ sehingga $a^{-1}b \in A_\mu$. Karena $A(e) \geq \mu$ dan $A(e) \geq \alpha$ dengan $\alpha < \mu$, diperoleh bahwa $(a^{-1}b) \in \tilde{A}_\mu \subseteq \tilde{A}_\alpha$. Dengan $(a^{-1}b) \in \tilde{A}_\alpha$, dihasilkan $a\tilde{A}_\alpha = b\tilde{A}_\alpha$.
2. Jika $A(e) < \mu$ maka $A(a^{-1}b) = A(e)$ sehingga $a^{-1}b \in A_{A(e)}$. Karena $A(e) \geq \alpha$, $A_{A(e)} \subseteq \tilde{A}_\alpha$, diperoleh bahwa $(a^{-1}b) \in \tilde{A}_\alpha$, sehingga dihasilkan $a\tilde{A}_\alpha = b\tilde{A}_\alpha$.

Oleh karena itu, Jika $a \circ \tilde{A} = b \circ \tilde{A}$ maka $a\tilde{A}_\alpha = b\tilde{A}_\alpha$. ■

Demikian pula, Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , $a, b \in G, \alpha \in (\lambda, \mu]$ dan $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$. Jika $\tilde{A} \circ a = \tilde{A} \circ b$ maka $\tilde{A}_\alpha a = \tilde{A}_\alpha b$.

Proposisi 3.1.15 (e.g (Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013))

Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G dan $a, b \in G$. Jika $a \circ \tilde{A} = b \circ \tilde{A}$ dan $\lambda < A(a) < \mu$ maka $A(a) = A(b)$.

Bukti.

Berdasarkan Akibat 3.1.4, jika $a \circ \tilde{A} = b \circ \tilde{A}$ maka $(a^{-1}b) \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$. Dengan beberapa kondisi berikut

1. Kondisi 1

Jika $A(e) \geq \mu$. Berdasarkan Proposisi 3.1.8, jika $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$ maka $a \in \tilde{A}_\mu$. Karena $a = a^{-1}b$, berlaku bahwa $a^{-1}b \in \tilde{A}_\mu$ sehingga $A(a^{-1}b) \geq \mu$. Berdasarkan Proposisi 2.7.8, $A(xy) = A(x) = A(y)$. Dengan $\lambda < A(a) < \mu$. $x = a$, $y = a^{-1}b$, diperoleh $A(a(a^{-1}b)) = A(a)$. Berdasarkan sifat asosiatif dalam grup, berlaku bahwa $a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = b$. Hal tersebut menunjukkan bahwa $A(a) = A(b)$.

2. Kondisi 2

Jika $A(e) < \mu$ dan $\lambda < A(a) < \mu$ maka $A(a) \leq A(e) \leq \mu$. Berdasarkan Proposisi 3.1.13, $A(a) = A(e)$ maka $A(a^{-1}b) = A(e)$.

- a. Jika $A(a) < A(e) = A(a^{-1}b)$. Karena $A(a) < A(e)$ atau $A(a) = A(a^{-1}b)$ dan berdasarkan Proposisi 2.7.8, sehingga $A(a(a^{-1}b)) = A(a)$. Dalam grup, berlaku $a(a^{-1}b) = b$, sehingga $a, a^{-1}b$ dan didapatkan bahwa $A(a) = A(b)$.

- b. Jika $A(a) = A(e) = A(a^{-1}b)$, maka $a, a^{-1} \in \tilde{A}_{A(e)}$. Karena subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , $\tilde{A}_{A(e)}$ merupakan subgrup fuzzy (λ, μ) dari G (berdasarkan Proposisi 2.7.6). Dengan $a, a^{-1} \in A_{A(e)}$, berlaku bahwa $b \in A_{A(e)}$ sehingga $A(b) \geq A(e)$. Berdasarkan Akibat 2.7.5, $A(e)$ merupakan nilai derajat keanggotaan terbesar sehingga $A(b) = A(e) = A(a)$.

Perlu dicatat bahwa kebalikan dari Proposisi 3.1.15 tidak benar, sebagaimana ditunjukkan oleh contoh berikut.

Contoh. Misalkan grup G adalah siklik berorde 3 serta a sebagai generator.

$G = \{e, a, a^2\}$, diberikan masing - masing elemen G dengan nilai derajat keanggotaannya masing-masing. $\tilde{A}$ adalah Subgrup fuzzy (λ, μ) dari G dengan $(\lambda, \mu) = (0.3, 0.6)$, Berikut perhitungan nilai derajat keanggotaan tiap elemen di Grup Siklik orde 3,

$$A(a) = 0.5,$$

$$A(a^2) = 0.5, \text{ dan}$$

$$A(e) = 0.7.$$

Didapatkan bahwa $(a \circ A)(a) = (A(a^{-1}a) \vee \lambda) \wedge \mu = (A(e) \vee \lambda) \wedge \mu = 0.7$, dan $(a^2 \circ A)(a) = (A(a^{(-1)(2)}) \vee \lambda) \wedge \mu = (A(a) \vee \lambda) \wedge \mu = 0.5$. Sehingga, $a \circ \tilde{A} \neq a^2 \circ \tilde{A}$. ■

B. Koset tengah pada subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G .

Berdasarkan definisi, koset kanan dan koset kiri pada subgrup fuzzy (λ, μ) serupa dengan subgrup fuzzy hanya sedikit perbedaan di penambahan karakteristik λ dan μ sehingga dapat dikonstruksi

koset tengah subgrup fuzzy (λ, μ) berdasarkan koset tengah yang ada pada sugrup fuzzy yang didefinisikan

Definisi 3.2.1 Misalkan $\tilde{A}$ merupakan Subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G , serta $a \in G$. Dinyatakan bahwa

$(a \circ \tilde{A} \circ b)(x) = \{(x, (a \circ A \circ b)(x) \vee \lambda) \wedge \mu, \forall x \in G\}$, yang dimana, $(a \circ A \circ b)(x)$ terdefinisi

$$(a \circ A \circ b)(x) = (A(a^{-1}xb^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu.$$

Contoh 3.2.2 Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ merupakan sebuah grup dengan operasi penjumlahan modulo 4 $(\mathbb{Z}_4, +_4)$. Dibentuk sebuah himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada $\mathbb{Z}_4$ sebagai berikut

$$\tilde{A} = \{(0, 1), (1, 0.7), (2, 0.8), (3, 0.7)\},$$

di mana $\tilde{A}$ merupakan sebuah subgrup fuzzy $(0.4, 1)$ atas $\mathbb{Z}_4$.

Diberikan bahwa $a = \bar{1}$ serta $b = \bar{2}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (\bar{1} \circ A \circ \bar{2})(\bar{0}) &= (A(\bar{1}^{-1} + \bar{0} + \bar{2}^{-1}) \vee 0.4) \wedge 1 \\ &= (A(\bar{3} + \bar{0} + \bar{2}) \vee 0.4) \wedge 1 \\ &= (A(\bar{1}) \vee 0.4) \wedge 1 \\ &= (0.7 \vee 0.4) \wedge 1 = 0.7, \\ (\bar{1} \circ A \circ \bar{2})(\bar{1}) &= (A(\bar{1}^{-1} + \bar{1} + \bar{2}^{-1}) \vee 0.4) \wedge 1 \\ &= (A(\bar{3} + \bar{1} + \bar{2}) \vee 0.4) \wedge 1 \\ &= (A(\bar{2}) \vee 0.4) \wedge 1 \\ &= (0.8 \vee 0.4) \wedge 1 = 0.8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{1} \circ A \circ \bar{2})(\bar{2}) &= (A(\bar{1}^{-1} + \bar{2} + \bar{2}^{-1}) \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= (A(\bar{3} + \bar{2} + \bar{2}) \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= (A(\bar{3}) \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= (0.7 \vee 0.4) \wedge 1 = 0.7, \\
(\bar{1} \circ A \circ \bar{2})(\bar{3}) &= (A(\bar{1}^{-1} + \bar{3} + \bar{2}^{-1}) \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= (A(\bar{3} + \bar{3} + \bar{2}) \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= (A(\bar{0}) \vee 0.4) \wedge 1 \\
&= (1 \vee 0.4) \wedge 1 = 1.
\end{aligned}$$

Diperoleh bahwa, $\bar{1} \circ \tilde{A} \circ \bar{2} = \{(\bar{0}, 0.7), (\bar{1}, 0.8), (\bar{2}, 0.7), (\bar{3}, 1)\}$.

Berikut diberikan proposisi terkait koset tengah pada subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G .

Proposisi 3.2.3 Misalkan $\tilde{A}$ merupakan (λ, μ) dari G dan $a, b, c, d \in G$, berlaku bahwa $(a \circ b) \circ \tilde{A} \circ (c \circ d) = a \circ (b \circ \tilde{A} \circ c) \circ d$.

Bukti.

Berdasarkan Definisi 3.2.1, Pendefinisian pada sisi kiri persamaan tersebut adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
(a \circ b) \circ \tilde{A} \circ (c \circ d) &= (a \circ b) \circ A \circ (c \circ d)(x) \\
&= (a \circ (b \circ \tilde{A} \circ c) \circ d)(x),
\end{aligned}$$

dimana $(a \circ (b \circ \tilde{A} \circ c) \circ d)(x) = a \circ \tilde{A} \circ d$, dihasilkan

$$(b \circ \tilde{A} \circ c)(a^{-1}xd^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu.$$

Dengan $(b \circ \tilde{A} \circ c)(a^{-1}xd^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu = (b \circ \tilde{A} \circ c)(x)$, diperoleh

$$(A(b^{-1}(a^{-1}xd^{-1})(c^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu.$$

Akan ditunjukkan bahwa $(a \circ b) \circ \tilde{A} \circ (c \circ d) = a \circ (b \circ \tilde{A} \circ c) \circ d$.

Pendefinisian untuk sisi kanan adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} a \circ (b \circ \tilde{A} \circ c) \circ d &= (a \circ (b \circ \tilde{A} \circ c) \circ d)(x) \\ &= (b \circ \tilde{A} \circ c)(a^{-1}xd^{-1}) \vee \lambda \wedge \mu \\ &= (A(b^{-1}(a^{-1}xd^{-1})(c^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu. \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil pendefinisian kedua sisi tersebut, dapat dibuktikan bahwa, $(a \circ b) \circ \tilde{A} \circ (c \circ d) = a \circ (b \circ \tilde{A} \circ c) \circ d$. ■

Proposisi 3.2.4 Misalkan $\tilde{A}$ merupakan subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , serta $a, b, c, d \in G$. Berlaku $a \circ \tilde{A} \circ b = c \circ \tilde{A} \circ d$, jika dan hanya jika $b^{-1} \circ \tilde{A} \circ a^{-1} = d^{-1} \circ \tilde{A} \circ c^{-1}$.

Bukti.

$\Rightarrow$ Jika $a \circ \tilde{A} \circ b = c \circ \tilde{A} \circ d$ maka $b^{-1} \circ \tilde{A} \circ a^{-1} = d^{-1} \circ \tilde{A} \circ c^{-1}$ untuk setiap $x \in G$.

Ambil sebarang $x \in G$. Berdasarkan Definisi 3.2.1, diperoleh

$$\begin{aligned} (b^{-1} \circ \tilde{A} \circ a^{-1})(x) &= (A((b^{-1})^{-1}x(a^{-1})^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (A(bxa) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (A((bxa)^{-1} \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (A(a^{-1}x^{-1}b^{-1} \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (a \circ \tilde{A} \circ b)(x^{-1}). \end{aligned}$$

Karena $a \circ \tilde{A} \circ b = c \circ \tilde{A} \circ d$, maka berlaku

$$(a \circ \tilde{A} \circ b)(x^{-1}) = (c \circ \tilde{A} \circ d)(x^{-1}).$$

Berdasarkan Definisi 3.2.1, diperoleh

$$\begin{aligned} (c \circ \tilde{A} \circ d)(x^{-1}) &= (A(c^{-1}x^{-1}d^{-1} \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (A((dxc)^{-1} \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (A((dxc) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (d^{-1} \circ \tilde{A} \circ c^{-1})(x). \end{aligned}$$

Terbukti bahwa Jika $a \circ \tilde{A} \circ b = c \circ \tilde{A} \circ d$ maka $b^{-1} \circ \tilde{A} \circ a^{-1} = d^{-1} \circ \tilde{A} \circ c^{-1}$ untuk setiap $x \in G$.

$\Leftarrow$ Jika $b^{-1} \circ \tilde{A} \circ a^{-1} = d^{-1} \circ \tilde{A} \circ c^{-1}$, maka $a \circ \tilde{A} \circ b = c \circ \tilde{A} \circ d$ untuk setiap $x \in G$.

Ambil sebarang $x \in G$. Berdasarkan Definisi 3.2.1, diperoleh

$$\begin{aligned} (a \circ \tilde{A} \circ b)(x) &= (A(a^{-1}xb^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (A((a^{-1}xb^{-1})^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (A(bx^{-1}a) \vee \lambda) \wedge \mu \\ &= (b^{-1} \circ \tilde{A} \circ a^{-1})(x^{-1}). \end{aligned}$$

Karena $b^{-1} \circ \tilde{A} \circ a^{-1} = d^{-1} \circ \tilde{A} \circ c^{-1}$, maka berlaku

$$(b^{-1} \circ \tilde{A} \circ a^{-1})(x^{-1}) = (d^{-1} \circ \tilde{A} \circ c^{-1})(x^{-1}).$$

Berdasarkan Definisi 3.2.1, diperoleh

$$\begin{aligned}
 (d^{-1} \circ \tilde{A} \circ c^{-1})(x^{-1}) &= (A(dx^{-1}c) \vee \lambda) \wedge \mu \\
 &= (A((dx^{-1}c)^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu \\
 &= (A(c^{-1}xd^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu \\
 &= (c \circ \tilde{A} \circ d)(x)
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa, Jika $b^{-1} \circ \tilde{A} \circ a^{-1} = d^{-1} \circ \tilde{A} \circ c^{-1}$, maka $a \circ \tilde{A} \circ b = c \circ \tilde{A} \circ d$ untuk setiap $x \in G$.

Dapat disimpulkan bahwa $a \circ \tilde{A} \circ b = c \circ \tilde{A} \circ d$ berlaku, jika dan hanya jika $b^{-1} \circ \tilde{A} \circ a^{-1} = d^{-1} \circ \tilde{A} \circ c^{-1}$. ■

BAB IV

Kesimpulan dan Saran

A. Kesimpulan

Berdasarkan pada analisis yang telah dilakukan, diperoleh simpulan bahwa

1. Beberapa karakteristik yang berkaitan dengan bentuk kiri dan kanan dari koset dalam struktur fuzzy- (λ, μ) dapat dijabarkan sebagai berikut.

a. Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ merupakan subgrup fuzzy- (λ, μ) atas G , serta $a, b \in G$. Diperoleh

$$1) a \circ (b \circ \tilde{A}) = (ab) \circ \tilde{A},$$

$$2) (\tilde{A} \circ a) \circ b = \tilde{A} \circ (ab),$$

$$3) a \circ \tilde{A} = b \circ \tilde{B} \Leftrightarrow e \circ \tilde{A} = (a^{-1}b) \circ \tilde{B} \Leftrightarrow (b^{-1}) \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{B},$$

$$4) \tilde{A} \circ a = \tilde{B} \circ b \Leftrightarrow \tilde{A} \circ e = \tilde{B} \circ (ba^{-1}) \Leftrightarrow \tilde{A} \circ (ab^{-1}) = \tilde{B} \circ e.$$

b. Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy- (λ, μ) dan $x \in G$, terdapat beberapa kondisi berikut.

$$1) \text{ Jika } \lambda < A(x) < \mu \text{ maka } (e \circ A)(x) = A(x)$$

$$2) \text{ Jika } A(x) \geq \mu \text{ maka } (e \circ A)(x) = \mu$$

$$3) \text{ Jika } A(x) \leq \lambda \text{ maka } (e \circ A)(x) = \lambda$$

c. Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G . Hasil operasi $e \circ \tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G dan subgrup fuzzy.

- d. Misalkan $\tilde{A}$ merupakan subgrup normal fuzzy (λ, μ) dari G . Hasil operasi $e \circ \tilde{A}$ adalah subgrup normal fuzzy (λ, μ) dari G .
 - e. Jika $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , serta $A(e) \geq \mu$, maka $a \in A_\mu$, jika dan hanya jika $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$.
 - f. Jika $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G dan $\lambda < A(e) < \mu$, maka $A(a) = A(e)$ jika dan hanya jika $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$.
 - g. Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G . Hasil operasi $a \circ \tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G jika dan hanya jika $a \circ \tilde{A} = e \circ \tilde{A}$.
 - h. Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , $a, b \in G$, $\alpha \in (\lambda, \mu)$ dan $\tilde{A}_\alpha \neq \emptyset$. Jika $a \circ \tilde{A} = b \circ \tilde{A}$ maka $a\tilde{A}_\alpha = b\tilde{A}_\alpha$.
 - i. Misalkan $\tilde{A}$ adalah subgrup fuzzy (λ, μ) dari G dan $a, b \in G$. Jika $a \circ \tilde{A} = b \circ \tilde{A}$ dan $\lambda < A(a) < \mu$ maka $A(a) = A(b)$.
2. Definisi koset tengah pada subgrup fuzzy (λ, μ) adalah Misalkan $\tilde{A}$ merupakan subgrup fuzzy- (λ, μ) dari G , serta $a \in G$. Dinyatakan bahwa
- $(a \circ \tilde{A} \circ b)(x) = \{(x, (a \circ A \circ b)(x) \vee \lambda) \wedge \mu, \forall x \in G\}$, yang dimana, $(a \circ A \circ b)(x)$ terdefinisi

$$(a \circ A \circ b)(x) = A(a^{-1}xb^{-1}) \vee \lambda \wedge \mu$$

3. Sifat-sifat koset tengah pada subgrup fuzzy- (λ, μ) adalah sebagai berikut.

- a. Misalkan $\tilde{A}$ merupakan (λ, μ) dari G dan $a, b, c, d \in G$, berlaku bahwa $(a \circ b) \circ \tilde{A} \circ (c \circ d) = a \circ (b \circ \tilde{A} \circ c) \circ d$.
- b. Misalkan $\tilde{A}$ merupakan subgrup fuzzy (λ, μ) dari G , serta elemen a, b, c, d berada dalam G . Berlaku bahwa $a \circ \tilde{A} \circ b = c \circ \tilde{A} \circ d$, jika dan hanya jika kondisi $b^{-1} \circ \tilde{A} \circ a^{-1} = d^{-1} \circ \tilde{A} \circ c^{-1}$.

B. Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan, penelitian ini masih memiliki ruang lingkup yang terbatas pada pembahasan mengenai sifat koset dalam subgrup fuzzy- (λ, μ) . Oleh sebab itu, eksplorasi lebih lanjut di masa mendatang diharapkan dapat memperluas cakupan dengan mengeksplorasi aspek lain dalam aljabar fuzzy. Berdasarkan definisi koset yang telah dirumuskan, sifat koset tengah juga dapat dikaji lebih lanjut, termasuk potensi penerapannya dalam berbagai disiplin ilmu terkait.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdy, M. (2008). *Dasar-Dasar Teori Himpunan Kabur dan Logika Kabur*. Makassar: Badan Penerbit UNM Makassar.
- Abdurrahman, S. 2018. Interior Subgrup Fuzzy. *Jurnal Fourier*, 7(1): 13–21.
- Abdurrahman, S. 2021. Interior Subgrup ω -Fuzzy. *FIBONACCI: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, 6(2): 91–98.
- Agustin, A. H., Gandhiadi, G. K., & Oka, T. B. (2016). *Penerapan Metode Fuzzy Sugeno untuk Menentukan Harga Jual Sepeda Motor Bekas*. E-Jurnal Matematika, Vol. 5(4), 176–182. Fakultas MIPA, Universitas Udayana.
- Bhunias, S., & Ghorai, G. (2021). *A new approach to fuzzy group theory using (α, β) -Pythagorean fuzzy sets*. Songklanakarin Journal of Science and Technology, 43(1), 295–306.
- Humphreys, John., (1996). *A Course in Group Theory*. United States : Oxford University Press Inc.
- Holmes, R. R. (2018). *Abstract Algebra I*. Auburn University. Last revision: November 15, 2018. Licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License.
- Ikhwan, A., Hsb, L. T., Pratiwi, A. W., & Raynaldi, A. (2019). *Penerapan Fuzzy Mamdani untuk Sistem Pendukung Keputusan Pemilihan Laptop*. Jurnal FASILKOM, Vol. 9 No. 2, 476–483.

- Irawan, W. H., Hijriyah, N., & Habibi, A. R. (2014). *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN-Maliki Press. ISBN: 978-602-1190-04-3.
- Kandasamy, W. B. Vasantha. 2003). *Smarandache Fuzzy Algebra*. American Research Press.
- Khanna, V.K., et al. (2020) *Modern Algebra*. New Delhi : Vikas Publishing House Pvt. Ltd.
- Kurniawati, D. O., & Efendi, T. F. (2020). *Penerapan Metode Fuzzy Tsukamoto Dalam Diagnosa Penyakit Demam Berdarah*. Jurnal Informatika, Komputer dan Bisnis (JIKOBIS), Vol. 1, No. 1, 2020, 1–9. E-ISSN: 2807-5587.
- Li, Y., Wang, X., & Yang, L. 2013. A Study of (λ, μ) -Fuzzy Subgroups "Journal of Applied Mathematics". (2013)():1-7.
- Lolang, E. (2013). *Aljabar Abstrak*. Toraja : UKI Toraja Press.
- Rindengan, A. J., & Langi, Y. A. R. (2019). *Sistem Fuzzy*. Manado: Universitas Sam Ratulangi. ISBN: 978-602-6529-78-7.
- Rosenfeld, A. 1971. Fuzzy Group. *Journal of mathematical analysis and applications*". 35(3): 512-517.
- Vila, M.A. and Delgado, M. 1983. On medical diagnosis using possibility measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 10. ()(1-3): 211-222.
- X. Yuan, C. Zhang, and Y. Ren. 2003. Generalized fuzzy groups and many-valued implications. *Fuzzy Sets and Systems*. 138(1): 205-211

Zadeh, L. A. (1965). *Fuzzy sets*. Information and Control, 8(3), 338–353.

Zadeh, L. A. 1981. Fuzzy Groups and Level Subgroups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 8(3): 264-269

Zimmermann, H.J. . 1992. *Fuzzy Set Theory – and Its Applications*, Second, Revised Edition. USA : Kluwer Academic Publisher Group.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

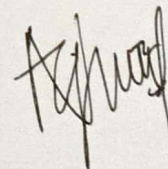
A. Identitas Diri

- 1. Nama Lengkap : Uli Roihanatunni'mah
- 2. Tempat, Tanggal Lahir : Bekasi, 14 Juli 2003
- 3. Alamat Rumah : Perumahan Trias RT 06 / RW 021,
Cibitung, Bekasi, Jawa Barat
- 4. HP : 089668786809
- 5. E-mail : uliroihana123@gmail.com

B. Riwayat Pendidikan

- 1. SDN Wanasari 15 Cibitung, Bekasi (2009-2015)
- 2. SMP Negeri 1 Tambun Selatan, Bekasi (2015-2018)
- 3. SMA Pusaka Nusantara 2, Bekasi (2018-2021)

Semarang, 10 Juni 2025



Uli Roihanatunni'mah
NIM : 2108046042