BAB II

TRIGONOMETRI DAN TEORI PENENTUAN ARAH KIBLAT

A. Trigonometri

1. Pengertian Trigonometri

Trigonometri berasal dari bahasa Yunani yaitu trigonon yang artinya tiga sudut dan metro artinya mengukur. Oleh karena itu trigonometri adalah sebuah cabang dari ilmu matematika yang berhadapan dengan sudut segi tiga dan fungsi trigonometrik seperti sinus, cosinus, dan tangen. Sedangkan definisi dari trigonometri menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) adalah ilmu ukur mengenai sudut dan sempadan dengan segitiga (digunakan dalam astronomi).[10]

Istilah trigonometri[11] juga sering kali diartikan sebagai ilmu ukur yang berhubungan dengan segitiga. Tetapi masih belum jelas yang dimaksudkan apakah itu segitiga sama kaki (siku-siku), segitiga sama sisi, atau segitiga sembarang. Namun, biasanya yang dipakai dalam perbandingan trigonometri adalah menggunakan segitiga sama kaki atau siku-siku. Dikatakan berhubungan dengan segitiga karena sebenarnya trigonometri juga masih berkaitan dengan geometri.[12] Baik itu geometri bidang maupun geometri ruang.

Trigonometri sebagai suatu metode dalam perhitungan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perbandingan-perbandingan pada bangun geometri, khususnya dalam bangun yang berbentuk segitiga. Pada prinsipnya trigonometri merupakan salah satu ilmu yang berhubungan

---

[10]KBBI, (Jakarta: PT Gramedia, 2008), hlm. 1487.

[11]Definisi trigonometri dari bahasa Inggris *trigonometry*, (lihat Kamus Inggris-Indonesia, John M. echols dan Hassan Shadily, Jakarta: PT Gramedia, 2003), hlm. 603.

[12]Geometri disini adalah cabang dari ilmu matematika yang mempelajari tentang bidang atau disebut juga ilmu ukur bidang, Hamid, Farida, *Kamus Ilmiyah Populer Lengkap*, (Surabaya: Apollo, t.th), hlm. 172.

dengan besar sudut, dimana bermanfaat untuk menghitung ketinggian suatu tempat tanpa mengukur secara langsung sehingga bersifat lebih praktis dan efisien.

Kesimpulan dari beberapa definisi di atas bahwa trigonometri adalah cabang dari ilmu matematika yang mengkaji masalah sudut, terutama sudut segitiga yang masih ada hubungannya dengan geometri. Sedangkan dalam aplikasinya, trigonometri dapat diaplikasikan dalam bidang astronomi. Dalam hal ini adalah ilmu falak, yaitu dalam praktik perhitungan arah kiblat.

2. Sejarah Trigonometri

Sejarah awal trigonometri dapat dilacak dari zaman Mesir Kuno, Babilonia dan peradaban Lembah Indus, lebih dari 3000 tahun yang lalu. Matematikawan India adalah perintis penghitungan variabel aljabar yang digunakan untuk menghitung astronomi dan juga trigonometri. Lagadha adalah matematikawan yang dikenal sampai sekarang yang menggunakan geometri dan trigonometri untuk penghitungan astronomi dalam bukunya Vedanga, Jyotisha, yang sebagian besar hasil kerjanya hancur oleh penjajah India.

Pelacakan lain tentang awal mula munculnya trigonometri adalah bersamaan dengan kemunculan tokoh matematikawan yang handal pada masa itu. Diantaranya matematikawan Yunani Hipparchus sekitar tahun 150 SM dengan tabel trigonometrinya untuk menyelesaikan segi tiga. Matematikawan Yunani lainnya, Ptolemy sekitar tahun 100 mengembangkan penghitungan trigonometri lebih lanjut. Disamping itu pula matematikawan Silesia Bartholemaeus Pitiskus menerbitkan sebuah karya yang berpengaruh tentang trigonometri pada tahun 1595 dan memperkenalkan kata ini ke dalam bahasa Inggris dan Perancis.

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, ada banyak aplikasi trigonometri. Terutama adalah teknik triangulasi yang digunakan dalam astronomi untuk menghitung jarak ke bintang-bintang terdekat, dalam geografi untuk menghitung antara titik tertentu, dan dalam sistem navigasi satelit.

Bidang lainnya yang menggunakan trigonometri termasuk astronomi (dan termasuk navigasi, di laut, udara, dan angkasa), teori musik, akustik, optik, analisis pasar finansial, elektronik, teori probabilitas, statistika, biologi, pencitraan medis/medical imaging (CAT scan dan ultrasound), farmasi, kimia, teori angka (dan termasuk kriptologi), seismologi, meteorologi, oseanografi, berbagai cabang dalam ilmu fisika, survei darat dan geodesi, arsitektur, fonetika, ekonomi, teknik listrik, teknik mekanik, teknik sipil, grafik komputer, kartografi, kristalografi.[13]

Selanjutnya, penemuan-penemuan tentang rumus dasar trigonometri oleh para tokoh ilmuwan muslim adalah sebagai berikut :

a. Al Buzjani

Abul Wafa Muhammad Ibn Muhammad Ibn Yahya Ibn Ismail al Buzjani, merupakan satu di antara sekian banyak ilmuwan Muslim yang turut mewarnai khazanah pengetahuan masa lalu. Dia tercatat sebagai seorang ahli di bidang ilmu matematika dan astronomi. Kota kecil bernama Buzjan, Nishapur, adalah tempat kelahiran ilmuwan besar ini, tepatnya tahun 940 M. Sejak masih kecil, kecerdasannya sudah mulai nampak dan hal tersebut ditunjang dengan minatnya yang besar di bidang ilmu alam. Masa sekolahnya dihabiskan di kota kelahirannya itu.

Konstruksi bangunan trigonometri versi Abul Wafa hingga kini diakui sangat besar kemanfaatannya. Dia adalah yang pertama menunjukkan adanya teori relatif segitiga parabola. Tak hanya itu, dia juga mengembangkan metode baru tentang konstruksi segi empat serta perbaikan nilai sinus 30 dengan memakai delapan desimal. Abul Wafa pun mengembangkan hubungan sinus dan formula 2 sin2 (a/2) = 1 - cos a dan juga sin a = 2 sin (a/2) cos (a/2)[14].

---

[13]Wikipedia ensiklopesi bebas, "Trigonometri", dalam *www.wikipedia.com* , diakses 16 Oktober 2011.

[14] Republika.co.id, "Al Buzjani, Peletak Dasar Rumus Trigonometri", diakses 28 September 2011.

b. Abu Nasr Mansur

Nama lengkap dari Abu Nasr Mansur adalah Abu Nasr Mansur ibnu Ali ibnu Iraq atau akrab disapa Abu Nasr Mansur (960 M – 1036 M). Abu Nasr Mansur terlahir di kawasan Gilan, Persia pada tahun 960 M. Hal itu tercatat dalam The Regions of the World, sebuah buku geografi Persia bertarikh 982M.

Pada karya trigonometrinya, Abu Nasr Mansur menemukan hukum sinus sebagai berikut:

$a/sin\ A\ =\ b/sin\ B\ =\ c/sin\ C.$[15]

Selanjutnya seiring dengan perkembangan ilmu matematika, rumus-rumus trigonometri yang biasa dipakai dalam ilmu matematika adalah sebagai berikut: [16]

a) Rumus kosinus jumlah dan selisih dua sudut

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

b) Rumus sinus jumlah dan selisih dua sudut

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

c) Rumus tangen jumlah dan selisih dua sudut

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$
$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

d) Rumus sinus sudut rangkap

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$
$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin 3A$$

e) Rumus kosinus sudut rangkap

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1$$
$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

[15] Admin, “Abu Nasr Mansur, Sang Penemu Hukum Sinus”.

[16] Noormandiri, *Matematika SMA Jilid 2A*, (Jakarta: Erlangga, 2004), hlm. 161-180, lihat juga (Sartono Wirodikromo, *Matematika 2000,* 2003) dan beberapa buku matematika SMA lainnya.

f) Rumus tangen sudut rangkap

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

g) Rumus sudut tengahan

$$\sin \frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\tan \frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

h) Rumus perkalian kosinus dan kosinus

$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

i) rumus perkalian sinus dan sinus

$$2 \sin A \sin B = - \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

j) rumus perkalian kosinus dan sinus

$$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$$
$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

k) Aturan/hukum sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

l) Aturan/hukum kosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

m) rumus penjumlahan dan pengurangan sinus dan kosinus

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$
$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$
$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$
$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

Rumus-rumus trigonometri yang tersebut di atas adalah rumus hasil kombinasi dan relasi antara rumus trigonometri yang satu dengan rumus trigonometri yang lainnya. Dalam beberapa buku referensi yang berbeda namun masih pada bahasan yang sama yaitu trigonometri, ditemukan beberapa metode yang berbeda untuk mendapatkan rumus-rumus tersebut. Hal demikian sah-sah saja, karena masing-masing ahli matematika punya asumsi-asumsi yang berbeda dalam menafsirkan rumus itu. Namun demikian, tentunya mereka masih menggunakan kaidah-kaidah yang sama, yaitu aturan geometri, relasi dan kombinasi dalam menafsirkan rumus-rumus trigonometri.

Namun, dalam kaitannya dengan penelitian ini peneliti hanya menyoroti relasi antara trigonometri dengan bidang astronomi atau ilmu falak. Diantaranya adalah dalam teori penentuan arah kiblatnya yaitu teori trigonometri bola (*spherical trigonometry*), teori geodesi dan teori navigasi. Adapun pembuktian dari rumus-rumus tersebut di atas adalah pada sub bab selanjutnya.

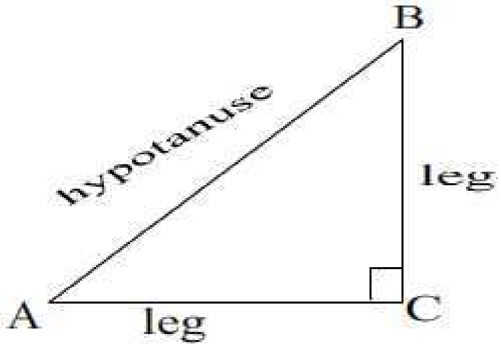
3. Konsep Dasar Trigonometri

Pada dasarnya, segitiga merupakan bentuk dasar dalam matematika terutama trigonometri. Sebab, kata trigonometri sendiri mengandung arti ukuran tentang segitiga. Dimana pengetahuan tentang bumi, matahari dan benda-benda langit lainnya sebenarnya juga diawali dari pemahaman konsep tentang rasio (*ratios*) pada segitiga. Sebagaimana contoh pada zaman dahulu (sebelum istilah trigonometri populer) keliling bumi sudah bisa ditentukan dengan menggunakan konsep segitiga siku-siku, meskipun hanya sebatas masih dalam perkiraan saja. Waktu itu keliling bumi diperkirakan mencapai 25.000 mil, sedangkan bila menggunakan metode modern keliling bumi adalah 24.902 mil.[17]

Meskipun dalam sejarah matematika aplikasi trigonometri berdasar pada konsep segitiga siku-siku, tetapi sebenarnya cakupan bidangnya sangatlah luas. Dan sekarang, trigonometri juga sudah mulai merambah pada bidang komputer, satelit komunikasi dan juga astronomi.[18]

Konsep dasar trigonometri tidak lepas dari bangun datar yang bernama segitiga siku-siku. Segitiga siku-siku didefinisikan sebagai segitiga yang memiliki satu sudut siku-siku[19] dan dua sudut lancip[20] pelengkap. Selanjutnya sisi dihadapan sudut siku-siku merupakan sisi terpanjang yang disebut dengan sisi miringnya (*hypotenuse*), sedangkan sisi-sisi dihadapan sudut lancip disebut kaki (*leg*) segitiga itu.[21]

Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar berikut ini:



Keterangan:

- Hypotenuse: sisi miring
- Leg: sisi kaki segitiga

Gambar 1. Segitiga siku-siku, dengan C sebagai sudut penyiku.

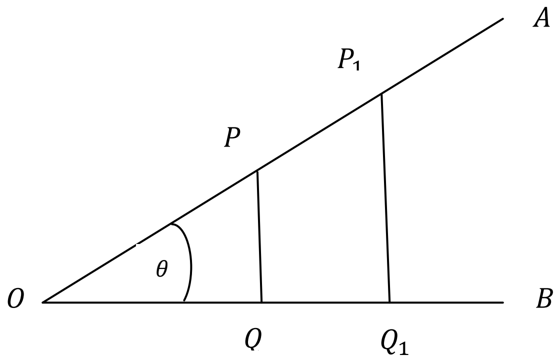
Pada gambar di atas terlihat jelas bahwa ΔABC merupakan segitiga siku-siku dengan C sebagai sudut siku-sikunya, dan AB merupakan sisi miringnya (*hypotenuse*). Sedangkan kaki-kakinya adalah BC yang posisinya di hadapan $\angle A$, dan AC di hadapan $\angle B$.

[17] *E*-book/ pdf, *Algebra 2 and Trigonometry*, dalam www.amscopub.com, hlm. 353. Diakses pada 09-02-2011.
[18] *E*-book/ pdf, *Algebra 2 and Trigonometry*, dalam www.amscopub.com, hlm. 353
[19] Sudut siku-siku adalah sudut yang besarnya 90°.
[20] Sudut lancip adalah sudut yang besarnya kurang dari 90° ($< 90°$).
[21] *E*-book/ pdf, *Algebra 2 and Trigonometry*, hlm. 354.

Selanjutnya dapat dituliskan perbandingan (*ratios*) sebagai berikut:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB}, \quad dan \quad \tan A = \frac{BC}{AC}$$

Versi lain untuk mendapatkan perbandingan fungsi trigonometri seperti sin, cos, tan, csc, sec dan cot adalah sebagai berikut:[22]



Gambar 2

Pada gambar 2 di atas, OA dan OB membentuk sudut θ, P terletak pada OA, Q tegak lurus dengan P di OB. Dari gambar tersebut, maka fungsi $\sin, \cos, \tan, \csc, \sec$ dan cot dapat didefinisikan sebagai berikut, dengan ketentuan $|PQ|$ menunjukan panjang garis PQ.

$$\sin\theta = \frac{|PQ|}{|OP|}, \qquad \cos\theta = \frac{|OQ|}{|OP|}, \qquad \tan\theta = \frac{|PQ|}{|OQ|}$$

$$\csc\theta = \frac{|OP|}{|PQ|}, \qquad \sec\theta = \frac{|OP|}{|OQ|}, \qquad \text{ctn}\,\theta = \frac{|OQ|}{|PQ|}$$

Di samping demikian, perlu juga ditunjukan bahwa fungsi tersebut telah didefinisikan oleh sudut θ, bukan titik P. Dari gambar 2 di atas P_1 juga merupakan titik di garis OA, dan Q_1 tegak lurus P_1 di garis OB, sehingga jelas ΔOPQ dan ΔOP_1Q_1 sebangun karena itu juga diperoleh hubungan seperti $\frac{|PQ|}{|OP|}$ dan $\frac{|PQ_1|}{|OP_1|}$. Oleh karena itulah, maka semua fungsi trigonometri telah didefinisikan.

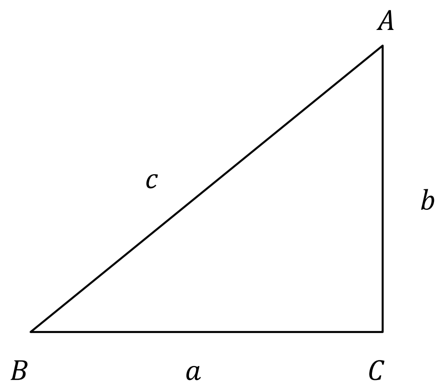
[22] *E*-book/pdf, *103 Trigonometry Problems,* dalam www.birkhauser.com , hlm. 1-3. Diakses pada 11-02-2011.

Dari penjelasan tersebut, dapat diketahui bahwa $\sin\theta$, $\cos\theta$, dan $\tan\theta$ merupakan perbandingan terbalik dengan $\csc\theta$, $\sec\theta$, dan $\cot\theta$ secara beturut-turut. Oleh sebab itu, dalam beberapa hal cukup mempertimbangkan $\sin\theta$, $\cos\theta$, dan $\tan\theta$ saja. Dari hubungan tersebut, maka dapat diketahui pula:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \quad \text{dan} \quad \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

Dengan menggunakan kaidah pada ΔABC dengan a, b, dan c adalah panjang sisi-sisi BC, CA, dan AB, $\angle A$, $\angle B$, dan $\angle$C secara berturut-turut adalah $\angle CAB$, $\angle ABC$, dan $\angle BCA$. Sedangkan ΔABC adalah segitiga siku-siku dengan sudut sikunya di C.

Perhatikanlah gambar berikut:



Gambar 3

Gambar di atas dapat memberikan penjelasan tentang perbandingan trigonometri sebagai berikut:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}$$
$$\sin B = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}, \quad \tan B = \frac{b}{a}$$

Dari rumus tersebut diperoleh:

$a = c\ \sin A$, $\quad a = c\ \cos B \quad a = b\ \tan A$

$b = c\ \sin B$, $\quad b = c\ \cos A \quad b = a\ \tan B$

$c = a\ \csc A \quad c = a\ \sec B \quad c = b\ \csc B \quad c = b \sec A$

Dari beberapa definisi di atas, dapat disimpulkan bahwa konsep trigonometri pada dasarnya memang mengacu pada perbandingan segitiga siku-siku. Dari perbandingan tersebut maka diperoleh fungsi trigonometri seperti: sinus $(sin), cosinus\ (cos), tangen\ (tan), cosecan\ (csc), secan\ (sec)$ dan $kotangen\,(cot)$. Namun, karena fungsi $cosecan\,(csc), secan\,(sec)$ dan $kotangen\,(cot)$ merupakan perbandingan terbalik (*reciprocal*) dari fungsi $sinus\ (sin), cosinus\ (cos), tangen\ (tan)$ maka yang sering digunakan adalah fungsi $sinus\ (sin), cosinus\ (cos), dan\ tangen\ (tan)$.

Supaya lebih jelas dalam memahami konsep trigonometri tersebut maka diberikan contoh sebagai berikut:

1) Dalam ΔPQR dengan R sebagai sudut siku-sikunya, $PQ = 25$ satuan, $QR = 24$ satuan, dan $PR = 7$ satuan, tentukan!

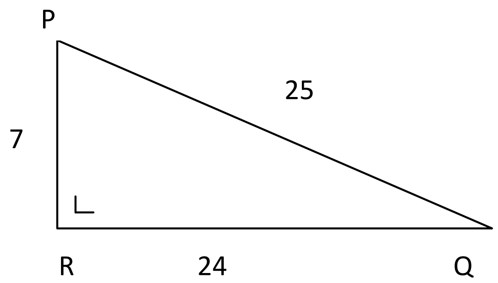
   $a)$ $\sin P,$ $b)$ $\cos P,$ $c)$ $\tan P$

   $d)$ $\sin Q,$ $e)$ $\cos Q,$ $e)$ $\tan Q$

Jawab:

Hipotenusa adalah PQ karena merupakan sisi terpanjang yaitu 25

Gambarnya sebagai berikut:



$a)$ $\sin P = \frac{RQ}{PQ} = \frac{24}{25}$ satuan

$b)$ $\cos P = \frac{PR}{PQ} = \frac{7}{25}$ satuan

$c)$ $\tan P = \frac{QR}{PR} = \frac{24}{7}$ satuan

$d)$ $\sin Q = \frac{PR}{PQ} = \frac{7}{25}$ satuan

$e)$ $\cos Q = \frac{PR}{PQ} = \frac{24}{25}$ satuan

$f)\ \tan Q = \frac{PR}{QR} = \frac{7}{24}$ satuan

B. Rumus-Rumus Trigonometri

Secara umum rumus-rumus trigonometri diperoleh dari hubungan atau relasi antara rumus yang satu dengan yang lainnya. Dalam hal ini maka dapat juga dikatakan rumus trigonometri diperoleh dari derivasi rumus yang lain. Misalnya sinus, cosinus, tangen, secan, cosecan dan cotangen antara yang satu dengan yang lain sebenarnya masih ada hubungannya.

Dalam beberapa referensi yang penulis peroleh dari beberapa buku terutama yang menggunakan bahasa Indonesia rumus-rumus trigonometri dibedakan menjadi beberapa kategori. Diantaranya adalah sebagai berikut:[23]

1. Rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut dan selisih dua sudut
2. Rumus trigonometri sudut rangkap dan tengahan
3. Rumus perkalian sinus dan kosinus
4. Rumus penjumlahan dan pengurangan sinus dan kosinus

Penjelasan dari beberapa rumus di atas akan dibahas secara berurutan, namun sebelum itu akan dijelaskan tentang sudut (*angel*) rotasi, koordinat titik pada lingkaran dengan pusat 0 dan jari-jari r, lingkaran satuan dan hasil-hasil dari trigonometri itu sendiri sebagai pengantar. Penjelasannya adalah sebagai berikut:

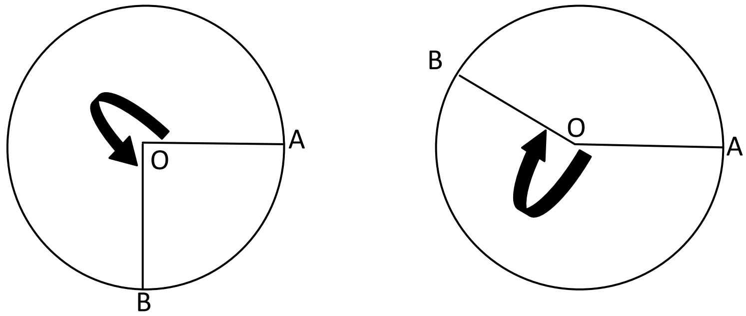
a) Sudut (*angle*) dan rotasi

Pembahasan sudut dan rotasi yang dimaksudkan di sini adalah dalam ruang lingkup suatu lingkaran sebagai permisalan. Artinya, sudut di sini adalah sudut yang terbentuk karena suatu rotasi pada lingkaran tersebut. Misalnya rotasi dari titik A ke titik B, baik itu rotasi berlawanan arah jarum jam (*counterclockwise*) ataupun searah dengan arah jarum jam (*clockwise direction*). Dalam hal ini jika rotasinya searah dengan jarum jam maka sudut

[23]Noormandiri, *Matematika SMA Jilid 2A*, hlm. 161-180, lihat juga (Sartono Wirodikromo, *Matematika 2000*, 2003) dan beberapa buku matematika SMA lainnya.

yang terbentuk adalah negatif, tetapi bila berlawanan dengan arah jarum jam maka sudut yang terbentuk adalah sudut positif.[24]

Ilustrasinya adalah pada gambar berikut:

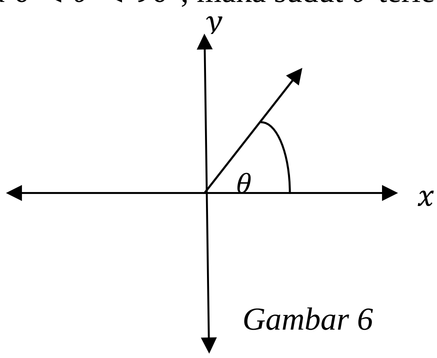


Gambar 4 dan Gambar 5. Ilustrasi perputaran sudut searah dan berlawanan jarum jam

Pada gambar 4 mengilustrasikan bahwa sudut yang dibentuk oleh $\angle AOB$ adalah positif karena rotasinya berlawanan dengan jarum jam, yaitu dari titik A menuju titik B. Sedangkan pada gambar 5 mengilustrasikan bahwa sudut yang dibentuk oleh $\angle AOB$ adalah negatif karena rotasinya searah dengan jarum jam.

Selanjutnya klasifikasi sudut berdasarkan letak kuadrannya dibedakan menjadi empat bagian, yaitu sudut yang terletak di kuadran I, kuadran II, kuadran III dan kuadran IV, untuk lebih jelasnya perhatikan penjelasan gambar berikut:[25]

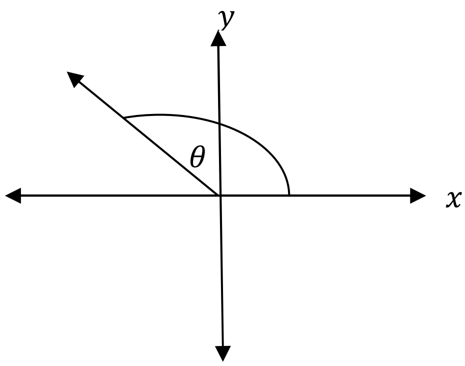
1) Bila $0 < \theta < 90°$, maka sudut θ terletak pada kuadran I.



Gambar 6

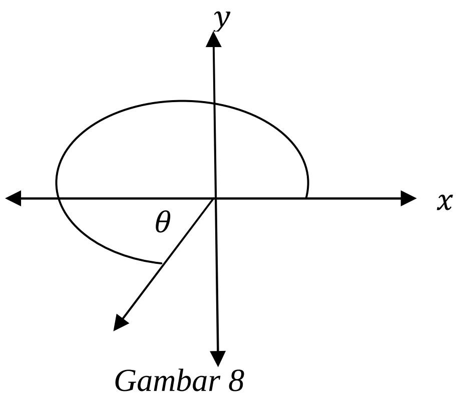
[24] *E*-book/ pdf, *Algebra 2 and Trigonometry*, hlm. 358
[25] *E*-book/ pdf, *Algebra 2 and Trigonometry*, 358.

2) Bila $90° < \theta < 180°$, maka sudut θ terletak pada kuadran II.



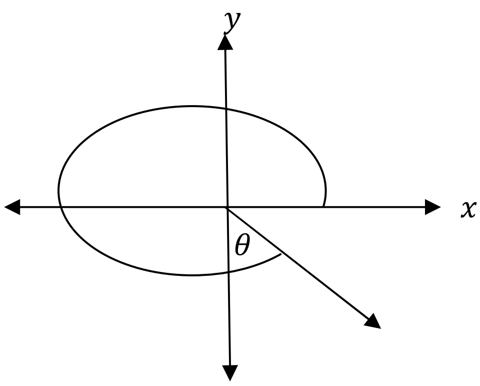
Gambar 7

3) Bila $180° < \theta < 270°$, maka sudut θ terletak pada kuadran III.



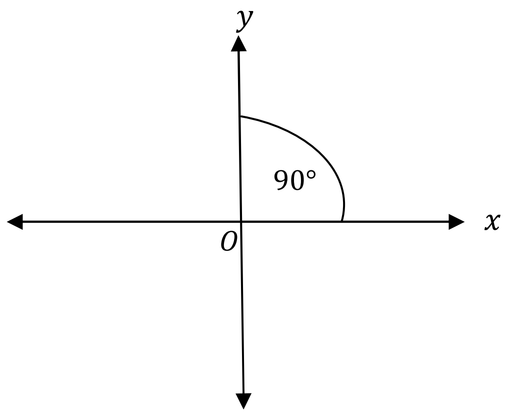
Gambar 8

4) Bila $270° < \theta < 360°$, maka sudut θ terletak pada kuadran IV.

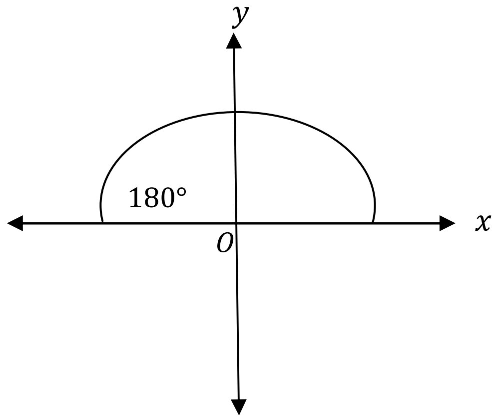


Gambar 9

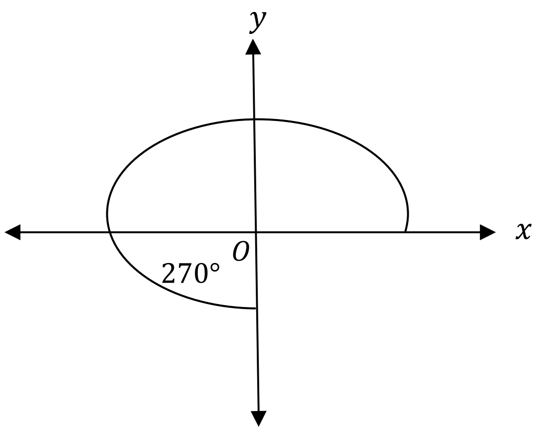
Selain sudut-sudut kuadran tersebut, terdapat juga sudut-sudut kelipatan dari 90°, yaitu 180° , 270°, dan 360°. Gambarnya adalah sebagai berikut:



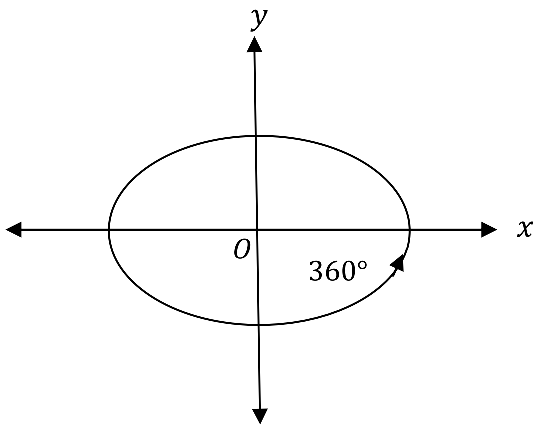
Gambar 10



Gambar 11



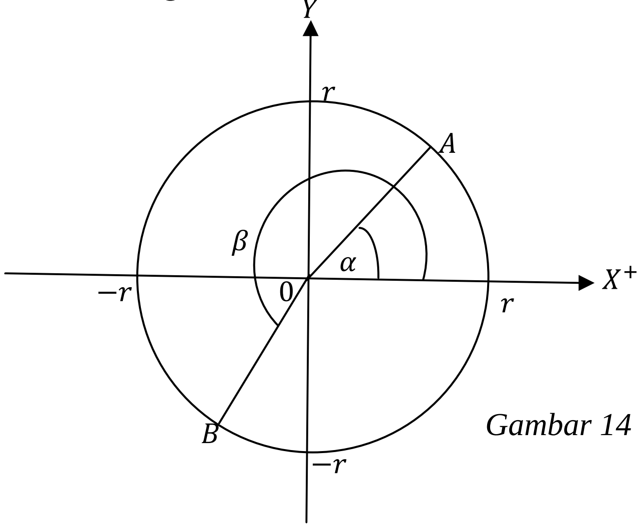
gambar 12



Gambar 13

b) Koordinat titik pada lingkaran dengan pusat 0 dan jari-jari r

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 14

Pada gambar 14 di atas, titik A dan B terletak pada lingkaran. Misalkan $\angle X^{+}0A = \alpha$ dan $\angle X^{+}0B = \beta$, α dan β diukur berlawanan dengan perputaran arah jarum jam, maka diperoleh:

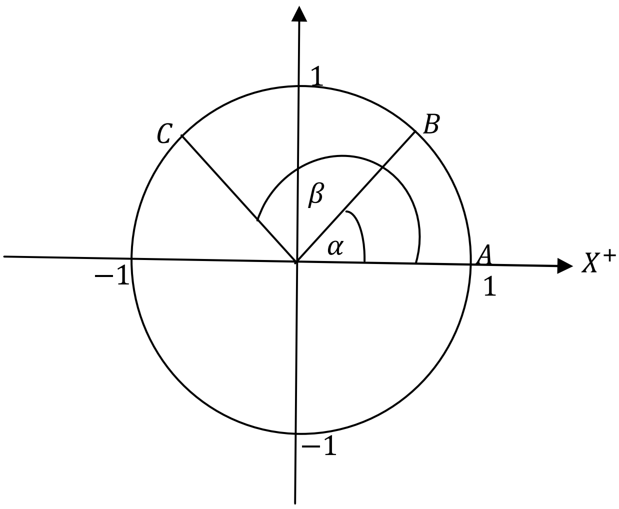
$A = (r\ \cos\alpha\,, r\ \sin\alpha\,)$

$B = (r\ \cos\beta\,, r\ \sin\beta\,)$

Dari sini maka dapat disimpulkan bahwa koordinat sembarang titik P pada lingkaran dengan sudut $\angle X^{+}0P = \theta$ adalah $(r\cos\theta\,, r\sin\theta\,)$.[26]

c) Lingkaran satuan

Lingkaran satuan adalah lingkaran yang berpusat di 0 dengan jari-jari $r = 1$. Kemudian, misalkan koordinat sembarang titik P pada lingkaran satuan sehingga $\angle X^{+}0P = \theta$ adalah $(r\cos\theta\,, r\sin\theta\,) = (\cos\theta\,, \sin\theta\,)$. Panjang busur $AB = \frac{\alpha}{2\pi}.2\pi r = \alpha r = \alpha\, radian$. Sedangkan panjang busur $AC = \frac{\beta}{2\pi}.2\pi r = \beta r = \beta\, radian$. Maka diperoleh panjang busur $BC = (\beta - \alpha)\ radian$. Ilustrasi gambarnya adalah sebagai berikut:



Gambar 15

Sehingga dapat disimpulkan bahwa apabila terdapat panjang sembarang busur, misalkan PQ sehingga $\angle P0Q = \theta$, maka panjang busar PQ adalah $\theta\ radian$.

[26] Sulistiyono, *et.al., Matematika SMA untuk Kelas XI,* hlm. 112.

d) Hasil-hasil dari trigonometri[27]

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin\theta = \cos(90° - \theta)$

$\cos\theta = \sin(90° - \theta)$

$\sin\theta = \sin(180° - \theta) = -\sin(180° + \theta) = -\sin(360° - \theta) = -\sin -\theta$

$\cos\theta = -\cos(180° - \theta) = -\cos(180° + \theta) = \cos(360° - \theta) = \cos -\theta$

$\tan\theta = -\tan(180° - \theta) = \tan(180° + \theta) = -\tan(360° - \theta)$

Sudut-sudut istimewa:

	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	~

Tanda fungsi trigonometri dalam berbagai kuadran:

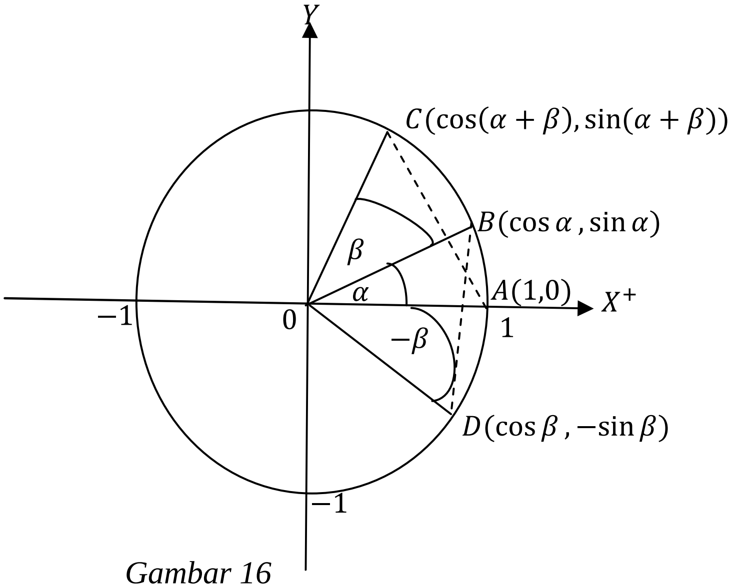
Kuadran	I	II	III	IV
Tanda positif	Semua	Sin	Tan	Cos

Selanjutnya penjelasan tentang rumus-rumus trigonometri adalah sebagai berikut:

[27] Sulistiyono, *et.al.*, *Matematika SMA untuk Kelas XI,* hlm. 112.

1. **Rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut dan selisih dua sudut**

a) Rumus untuk $\cos(\alpha \pm \beta)$ [28]



Gambar 16

Pada gambar 16 di atas diperlihatkan sebuah lingkaran satuan, sehingga koordinat titik A adalah (1,0). Misalkan $\angle AOB = \alpha$, dan $\angle BOC = \beta$, maka $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = \alpha + \beta$. Dengan mengambil sudut pertolongan $\angle AOD = -\beta$, maka ΔAOC kongruen dengan ΔBOD, akibatnya $AC = BD$ atau $AC^2 = BD^2$.

Kita ingat bahwa koordinat kartesius sebuah titik dapat dinyatakan sebagai $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, sehingga koordinat titik B adalah $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, titik C adalah $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$, dan titik $D(\cos\alpha, -\sin\beta)$.

Dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik diperoleh:

- Jarak titik A(0,1) dan $C(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ adalah

$$AC^2 = \{\cos(\alpha+\beta) - 1\}^2 + \{\sin(\alpha+\beta) - 0\}^2$$
$$= \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 + \sin^2(\alpha+\beta)$$
$$= \underbrace{\{\cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta)\}}_{=1} + 1 - 2\cos(\alpha+\beta)$$
$$AC^2 = 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$$

- Jarak titik $B(\cos\alpha, \sin\alpha)$ dan $D(\cos\beta, -\sin\beta)$ adalah :

[28] Sartono Wirodikromo, *Matematika untuk SMA Kelas XI*, (Jakarta: Penerbit Erlangga, 2001), hlm. 82-83.

$$BD^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (-\sin\beta - \sin\alpha)^2$$

$$= cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha$$

$$= (cos^2\beta + sin^2\beta) + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$BD^2 = 2 - 2\,cos\,\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$$

Karena $AC^2 = BD^2$, maka diperoleh hubungan

$$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\,cos\,\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Jadi rumus untuk $\cos(\alpha+\beta)$ adalah:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Sedangkan rumus untuk $\cos(\alpha-\beta)$ dapat diperoleh dari rumus $\cos(\alpha+\beta)$ dengan cara mengganti sudut β menjadi $-\beta$.[29]

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha+(-\beta)) \\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\,(-\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Sehingga rumus untuk $\cos(\alpha-\beta)$ adalah:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Dari kedua rumus di atas, maka dapat disederhanakan menjadi:

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$$

b) Rumus untuk $\sin(\boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{\beta})$ [30]

Rumus sinus jumlah dua sudut dapat dicari dengan menggunakan rumus kosinus selisih dua sudut, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) \\ &= \cos\left((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta\right)\end{aligned}$$

[29] Sartono Wirodikromo, *Matematika untuk SMA Kelas XI*, hlm. 82-83.
[30] Sulistiyono, *et.al., Matematika SMA untuk Kelas XI*, hlm. 113-114.

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Jadi,

$$\sin(\alpha + \beta) \quad = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Selanjutnya, untuk mencari rumus $\sin(\alpha - \beta)$ dapat dicari dengan mengubah $\sin(\alpha - \beta)$ menjadi $\sin(\alpha + (-\beta))$. Dengan cara yang sama seperti di atas pada rumus $\sin(\alpha + \beta)$ akan diperoleh;

$$\sin(\alpha - \beta) \quad = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Sehingga rumus untuk $\sin(\alpha \pm \beta)$ adalah:

$$\sin(\alpha \pm \beta) \quad = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

c) Rumus untuk $\tan(\boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{\beta})$ [31]

Rumus tangen jumlah dan selisih dua sudut dapat diturunkan dari rumus jumlah dan selisih dua sudut sinus dan kosinus. Penjelasannya adalah sebagai berikut:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \Rightarrow$$

Bagi pembilang dan penyebut dengan $\cos\alpha\cos\beta$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Dengan menggunakan cara yang sama, diperoleh:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

[31] Sulistiyono, *et.al., Matematika SMA untuk Kelas XI,* hlm. 116.

2. **Rumus trigonometri sudut rangkap dan tengahan**[32]

a) **Sinus sudut rangkap**

Sinus sudut rangkap dinyatakan dengan $\sin 2\alpha$. Rumus ini diperoleh dari rumus sinus jumlah dua sudut. Penjelasannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha+\alpha)\\ &= \sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

b) **Kosinus sudut rangkap**

Seperti pada $\sin 2\alpha$, rumus $\cos 2\alpha$ dapat diperoleh dari rumus kosinus jumlah dua sudut. Penjelasannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha)\\ &= \cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha\\ &= cos^2\alpha-\sin^2\alpha\end{aligned}$$

Dengan menggunakan identitas $cos^2\alpha+sin^2\alpha=1$, maka akan diperoleh bentuk lain dari $\cos 2\alpha$.

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ &= cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)\\ &= 2cos^2\alpha-1\end{aligned}$$

Selain itu $\cos 2\alpha$ juga dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ &= (1-sin^2\alpha)-\sin^2\alpha\\ &= 1-2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

Dari beberapa rumus di atas, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ &= 2cos^2\alpha-1\\ &= 1-2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

[32] Sulistiyono, *et.al., Matematika SMA untuk Kelas XI,* hlm. 120.

c) Tangen sudut rangkap[33]

Rumus $\tan 2\alpha$ dapat diperoleh dari rumus $\tan(\alpha+\beta)$ dengan mensubtitusikan $\beta = \alpha$, sehingga diperoleh:

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha)$$
$$= \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$
$$= \frac{2\tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$$

d) Trigonometri sudut tengahan[34]

Rumus trigonometri sudut tengahan dapat diturunkan dari rumus trigonometri sudut rangkap. Penjelasannya adalah sebagai berikut;

$$\cos 2\alpha = 2\,cos^2\alpha - 1 \rightarrow cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \ldots\ldots\ldots..(1)$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\,sin^2\alpha \rightarrow sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \ldots\ldots\ldots..(2)$$

Dengan menggunakan identitas tersebut dapat diturunkan tiga identitas yang baru. Misalkan $2\alpha = \theta$, maka $\alpha = \frac{\theta}{2}$. Sehingga jika disubtitusikan $\alpha = \frac{\theta}{2}$ ke persamaan (1) dan (2) akan diperoleh:

$$cos^2\,\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$
$$sin^2\,\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

atau

$$cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$
$$sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

[33] Sartono Wirodikromo, *Matematika untuk SMA Kelas XI*, hlm. 91.
[34]Sulistiyono, *et.al.*, *Matematika SMA untuk Kelas XI*, hlm. 123.

Sedangkan untuk $tan\ \frac{\theta}{2}$ diperoleh dengan menggunakan hubungan:

$$tan\ \frac{\theta}{2} = \frac{sin\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$$

3. Rumus perkalian sinus dan kosinus[35]

Rumus yang digunakan untuk mencari rumus perkalian sinus dan kosinus adalah rumus jumlah dan selisih dua sudut. Penjelasannya adalah sebagai berikut:

a) Perkalian kosinus dan kosinus

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{array} +$$

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

Jadi,

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ atau

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

b) Perkalian sinus dan sinus

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -\sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{array} -$$

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\ \sin\alpha\sin\beta$$

Jadi,

$-2\ \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$ atau

$$sin\ \alpha\ sin\ \beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

[35] Sulistiyono, *et.al.*, *Matematika SMA untuk Kelas XI*, hlm. 126.

4. **Rumus penjumlahan dan pengurangan sinus dan kosinus**[36]

Rumus penjumlahan dan pengurangan sinus dan kosinus dapat diperoleh dari rumus perkalian sinus dan kosinus. Penjelasannya adalah sebagai berikut;

Seperti diketahui, rumus perkalian sinus dan kosinus adalah:

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = -(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))$

$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

Misalkan A = $\alpha+\beta$ dan B = $\alpha-\beta$ maka:

A + B = $(\alpha+\beta)$ + $(\alpha-\beta)$ = 2 $\alpha \rightarrow \alpha = \frac{A+B}{2}$

A - B = $(\alpha+\beta)$ - $(\alpha-\beta)$ = 2 $\beta \rightarrow \beta = \frac{A-B}{2}$

Bila permisalan di atas disubtitusikan pada rumus perkalian sinus dan kosinus maka akan diperoleh rumus penjumlahan dan pengurangan sinus dan kosinus sebagai berikut:

$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

C. Aturan Sinus dan Kosinus

1. Aturan Sinus[37]

Misalkan ada sebuah segitiga, katakanlah ABC, maka akan dapat dibuktikan bahwa [ABC] = $\frac{ab\sin C}{2}$ yang secara simetri juga dapat diperoleh rumus sebgai berikut:

[ABC] = $\frac{ab\sin C}{2} = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{ac\ sin\ B}{2}$

---

[36] Sulistiyono, *et.al.*, *Matematika SMA untuk Kelas XI,* hlm. 129.

[37] *E*-book/pdf, *103 Trigonometry Problems,* hlm. 18

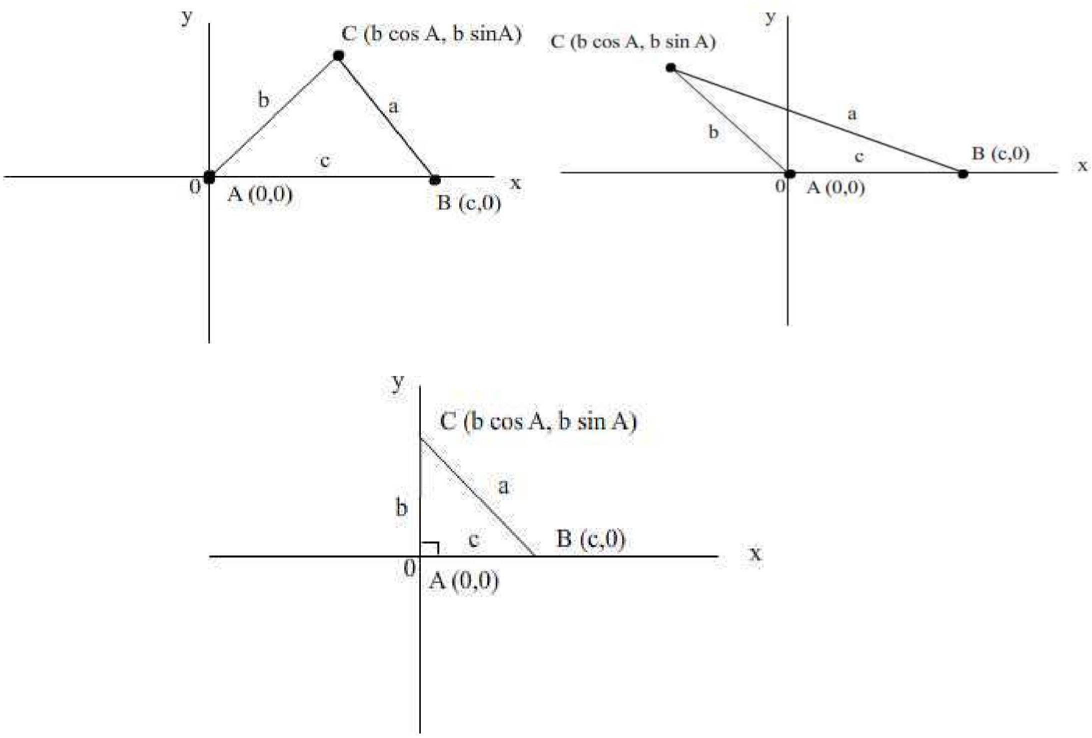
Jika rumus tersebut dibagi denga pembagi $\frac{abc}{2}$, maka akan menghasilkan rumus sebagai berikut:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \text{ atau } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Rumus itulah yang kemudian dinamakan aturan atau hokum sinus.

2. Aturan Kosinus[38]

Ketika kita tahu dua ukuran sisi dan juga sudut suatu segitiga, maka ukuran dan bentuk segitiga tersebut dapat ditentukan. Oleh sebab itu, ketiga sisinya juga dapat ditentukan. Untuk lebih mudahnya maka segitiga tersebut diletakkan pada suatu bidang koordinat sebagai berikut;



Gambar 17

Pada gambar 17 di atas adalah ΔAABC dengan AB = c, BC = a, dan CA= b, koordinat A(0,0), B(c,0) dan C(b cos A, b sin A). Bila b, c dan sudut A diketahui ukurannya, lalu koordinat dari tiap-tiap vertex (ujung) juga

[38] *E*-book/ pdf, *Algebra 2 and Trigonometry,* 552-553

diketahui, maka dapat pula ditentukan a, dan panjang ketiga sisi segitiga tersebut dengan menggunakan rumus jarak.

Rumus jarak antara dua titik, misalkan P(x_1, y_1) dan Q(x_2, y_2) adalah:

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Misalkan P(x_1, y_1) = B(c,0) dan Q(x_2, y_2) = C(b cos A, b sin A), dengan menggunakan rumus jarak tersebut akan diperoleh:

$$BC^2 = (b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2$$

$$= b^2cos^2A - 2\,bc\cos A + c^2 + b^2sin^2A$$

$$= b^2cos^2A + b^2sin^2A + c^2 - 2\,bc\cos A$$

$$= b^2(cos^2A + sin^2A) + c^2 - 2\,bc\cos A$$

$$= b^2(1) + c^2 - 2\,bc\cos A$$

$$= b^2 - 2\,bc\cos A$$

Karena BC = a, maka:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A}$$

rumus itulah yang kemudian dinamakan aturan kosinus. Dengan cara yang sama akan diperoleh pula rumus:

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos B}$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C}$$

D. Teori Penentuan Arah Kiblat

1. Teori Trigonometri Bola *(Spherical Trigonometry)*

Teori trigonometri bola dapat digunakan untuk menentukan arah kiblat dengan menggunakan rumus segitiga bola untuk menentukan sudut yang dibentuk dari dua titik yang berada di atas bumi. Keberadaan bumi yang mendekati bentuk bola memudahkan penentuan perhitungan arah atau jarak sudut suatu tempat dihitung dari tempat lain. Oleh karena itu, teori trigonometri bola dapat digunakan dalam penentuan arah kiblat.

Teori trigonometri bola berbeda dengan trigonometri bidang datar. Dalam trigonometri bola membahas sudut-sudut segitiga yang diaplikasikan pada bidang bola. Sedangkan trigonometri bidang datar membahas sudut-sudut segitiga yang diaplikasikan pada bidang datar. Trigonometri bidang datar hanya terbatas pada perhitungan segitiga siku-siku bidang datar. Sedangkan trigonometri bola lebih komplek karena banyak berkaitan dengan posisi bumi, matahari, bulan dan sebagainya.

Saat ini teori trigonometri bola berkembang sangat pesat. Teori ini banyak digunakan untuk perhitungan arah kiblat, waktu sholat, awal bulan qamariyah dan lain-lain. Teori ini juga sangat bermanfaat sekali terkait dengan aplikasi dalam perhitungan ilmu falak dan astronomi.

Rumus-rumus yang digunakan dalam penentuan arah kiblat dengan trigonometri bola adalah ssebagai berikut:

a) $\mathbf{\cot X = \cot b \ \sin a \ \div \ \sin C - \cos a \cot C}$[39] yang dapat disederhanakan menjadi:

$\mathbf{\cot X = \tan \varphi^m \cos \varphi^x \div \sin C - \sin \varphi^x \div \tan C}$

Keterangan :

φ^m = lintang Makkah

φ^x = lintang tempat yang akan diukur

b) $\boldsymbol{\cot B = \cot c \sin(a - p) \div \sin p \ \ \tan p = \tan b \ \cos c}$[40]

c) $\boldsymbol{\cot B = \dfrac{\cos(\varphi B) \tan(\varphi A) - \sin(\varphi B) \cos(B - A)}{\sin(B - A)}}$[41]

d) $\boldsymbol{\tan \dfrac{(A+B)}{2} = \dfrac{\cos\frac{(a-b)}{2}}{\cos\frac{(a+b)}{2}} \cot \dfrac{c}{2}}$ dan $\boldsymbol{\tan \dfrac{(A-B)}{2} = \dfrac{\sin\frac{(a-b)}{2}}{\sin\frac{(a+b)}{2}} \cot \dfrac{c}{2}}$[42]

2. Teori Geodesi

Disamping teori trigonometri bola *(sperical trigonometry),* teori geodesi juga sangat membantu dalam hal penentuan arah kiblat. Konsep dari teori geodesi juga mengacu pada bentuk bumi. Kalau pada teori trigonometri bola bentuk bumi diasumsikan bulat seperti bola, sedangkan dalam teori geodesi

[39] Ahmad Izzuddin, *"Abu Raihan Al-Biruni dan Teori Penentuan Arah Kiblat (Studi Penelusuran Asal Teori Panentuan Arah Kiblat)"*, hlm. 43.

[40] A. Jamil, *Ilmu Falak (teori dan Aplikasi),* (Jakarta: Amzah, 2009), hlm. 111.

[41] A. Jamil, *Ilmu Falak (teori dan Aplikasi),* hlm. 111.

[42] A. Jamil, *Ilmu Falak (teori dan Aplikasi),* hlm. 111.

bentuk bola diasumsikan tidak bulat seperti bola namun memakai pendekatan *ellipsoida.*[43]

Menurut kamus besar bahasa Indonesia (KBBI), definisi geodesi adalah[44] cabang dari geologi yang menyelidiki tentang ukuran dan bangun bumi. Geodesi juga didefinisikan sebagai ilmu mengukur tanah. Sedangkan definisi geodesi berdasarkan definisi klasik dan modern adalah sebagai berikut:[45]

a) Definisi klasik:
   - Menurut helmert (1880), geodesi adalah ilmu tentang pengukuran dan pemetaan permukaan bumi.
   - Torge (1980) mendefinisikan, bahwa geodesi tak hanya mencakup permukaan bumi saja, tetapi juga mencakup permukaan dasar laut.

Meskipun teori klasik tersebut sampai batas tertentu masih berlaku, tetapi ia tidak dapat menampung perkembangan ilmu geodesi yang terus berkembang dari waktu ke waktu.

b) Definisi modern:
   - Definisi geodesi menurut OSU (2001), geodesi adalah bidang ilmu inter-disipliner yang menggunakan pengukuran-pengukuran permukaan bumi serta dari wahana pesawat dan wahana angkasa untuk mempelajari bentuk dan ukuran bumi, planet-planet dan satelitnya, serta perubahan-perubahannya, menentukan secara teliti posisi serta kecepatan dari titik-titik ataupun objek-objek dari permukaan bumi atau yang mengorbit bumi dari planet-planet dalam suatu sistem referensi tertentu; serta mengaplikasikan pengetahuan tersebut untuk berbagai aplikasi ilmiah dan rekayasa dengan menggunakan matematika, fisika, astronomi, dan ilmu komputer.
   - Menurut rinner (1997), geodesi adalah disiplin ilmu yang mempelajari tentang pengukuran dan perepresentasian dari bumi dan benda-benda langit lainnya, termasuk medan gaya beratnya masing-masing, dalam ruang tiga dimensi yang berubah dengan waktu.

---

[43]Ahmad Izzuddin, *Abu Raihan Al-Biruni*, hlm. 48.
[44] KBBI, hlm. 142.
[45]Hasanuddin Z. Abidin, *geodesi satelit*, (Jakarta: PT Pradnya Paramita, 2001), hlm. 1.

- Sedangkan vanisek dan Krakiwsky (1986) mengklarifikasikan tiga bidang kajian utama dari ilmu geodesi yaitu; penentuan posisi, penentuan medan gaya berat dan variasi temporal dan posisi medan gaya berat dimana domain spasialnya adalah bumi beserta benda-benda langit lainnya. Pada dasarnya setiap bidang kajian di atas mempunyai spektrum yang sangat luas, dari teoritis sampai praktis, dari bumi sampai benda-benda langit lainnya, dan juga mencakup matra darat, laut, udara, dan juga luar angkasa.

Kesimpulan yang dapat diambil dari beberapa definisi di atas adalah bahwa pada dasarnya geodesi merupakan ilmu ukur tanah atau bumi. Namun pada perkembangan selanjutnya geodesi tidak hanya terbatas pada permukaan bumi saja melainkan permukaan laut juga, bahkan planet-planet dan satelitnya. Di samping itu, geodesi juga dapat menentukan secara teliti posisi serta kecepatan dari titik-titik ataupun obyek-obyek dari permukaan bumi atau yang mengorbit bumi dari planet-planet dalam suatu sistem referensi tertentu serta mengaplikasikan pengetahuan tersebut untuk berbagai aplikasi ilmiah dan rekayasa dengan menggunakan matematika, fisika, astronomi, dan ilmu komputer.

Perhitungan yang digunakan untuk menentukan arah kiblat dengan teori geodesi adalah metode vincenty yaitu perhitungan jarak yang menggunakan bentuk matematis bola berjari-jari irisan normal dan berazimuth.[46] Sedangkan rumus yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{\cot \boldsymbol{B} = \frac{\cot \boldsymbol{b} \sin \boldsymbol{a} - \cos \boldsymbol{a} \cos \boldsymbol{C}}{\sin \boldsymbol{C}}}$$

[46] Ahmad Izzuddin, “Kajian Terhadap Metode-Metode Penentuan Arah Kiblat dan Akurasinya”, *Disertasi* , hlm. 156.

3. Teori Navigasi

Navigasi merupakan seni dan ilmu perjalanan secara aman dan efesien dari suatu tempat ke tempat lain. Navigasi (*navigation*) berasal dari kata *navis* yang artinya kapal dan *agire* yang berarti pemandu. Sehingga menurut orang dahulu navigasi diartikan sebagai seni dan ilmu menuntun kapal laut dalam berlayar.[47]

Sedangkan definisi navigasi berdasarkan kamus besar bahasa Indonesia adalah:[48] n 1. Pengetahuan (tentang posisi, jarak, dsb) untuk menjalankan kapal laut, pesawat dsb dari suatu tempat ke tempat yang lain. n 2. Tindakan menempatkan haluan kapal atau arah terbang. n 3. Pelayaran, penerbangan, navigasi kutub: himpunan teknik navigasi, khusus disesuaikan untuk daerah kutub yang berbeda dengan daerah lain sehingga memerlukan modivikasi dalam prinsip navigasi.

Teori navigasi yang terkait dengan penentuan arah kiblat pada dasarnya difokuskan pada konsep peta yang ada dalam navigasi. Ini bisa diketahui dari peta khusus buatan Islam untuk mencari sudut kiblat. Ditemukan dalam salinan yang unik dari sebuah risalah pada astronomi rakyat oleh Siraj al-Dunya al-Din, yang disusun pada tahun 607 H. Dalam hal ini menghubungkan lokalitas seseorang ke Makkah dan ukuran kecenderungan untuk meredian lokal seseorang. Meskipun masih sederhana, sistem kerja ini masih cukup baik untuk daerah seperti Mesir dan Iran. Namun arah peta di sekitar Horizon terlihat kasar karena terkait dengan terbit surya. Peta tersebut merupakan contoh unik kombinasi antara kartografi, matematika dan astronomi.

Teori navigasi pada aplikasinya juga merupakan teori yang digunakan untuk perjalanan menuju suatu tempat. Beberepa istilah yang erat dengan teori ini yakni tentang navigasi *loxodromoc (mercartor navigation)* yang memiliki arti jalur serong yang mengikuti arah tetap (misalnya merujuk pada

---

[47]Muhammad Yunus hutasuhut, *Mengenal Dunia Penerbangan,* (Jakarta: PT Gramedia Widiasarana, 2005), hlm. 112.

[48]KBBI, hlm, 955.

utara sebenarnya) sehingga di peta mercator (peta datar) tampak jalurnya lurus, meskipun jalur sebenarnya dipermukaan bumi itu melengkung.

Istilah lainnya adalah *navigasi orthodromic* yang memiliki arti jalur lurus yang mengikuti arah lurus dipermukaan bumi, walau sudut arahnya (relatif terhadap garis bujur, selalu berubah). Dalam trigonometri bola, jalur tersebut mengikuti lingkaran besar (lingkaran yang titik pusatnya di pusat bola, bumi).[49]

---

[49]Ahmad Izzuddin, "Kajian Terhadap metode-Metode Penentuan Arah Kiblat dan Akurasinya", *Disertasi*, hlm. 166-167